Lógica Elementar

Prof. Olavo Leopoldino da Silva Filho
Prof. Marcello Ferreira

Apoio:

CAPES

Organização:

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CEAD Centro de Educação a Distância

UnB

FICHA TÉCNICA

Reitoria
Márcia Abrahão Moura
Reitora

Vice-Reitoria
Prof. Enrique Huelva Unternbäumen
Vice-Reitor

Decanato de Graduação
Sérgio Antônio Andrade de Freitas
Decano

Diretoria do CEAD
Letícia Lopes Leite
Diretora

Coordenação-Geral UAB
Marcello Ferreira
Coordenador-Geral

Coordenação Acadêmica do CEAD
Débora Furtado Barrera
Coordenadora

Equipe Multidisciplinar UAB/CEAD
Danielle Xabregas Pamplona Nogueira
Débora Furtado Barrera
Deise Mazzarella Goulart Ferreira
Fabrícia Faleiros Pimenta
Helena Célia de Souza Sacerdote
Helena Cristina Ribeiro Silva
Janaína Angelina Teixeira
Jean Vieira de Brito
Lívia Veleda de Sousa e Melo
Marcos Rogério Martins Costa
Matheus Felipe da Costa
Moisés Silva de Sousa
Patrícia Teixeira Batista
Sanny Caroline Saraiva de Sousa
Sílvia Urmila Almeida Santos
Thiago dos Santos Brandão

Autores
Olavo Leopoldino da Silva Filho
Marcello Ferreira

Revisão
Helena Célia de Souza Sacerdote
Fabrícia Faleiros Pimenta

Diagramação
Matheus Felipe da Costa
Sanny Caroline Saraiva de Sousa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(BENITEZ Catalogação Ass. Editorial, MS, Brasil)

S58L Silva Filho, Olavo Leopoldino da
1.ed. Lógica elementar / Olavo Leopoldino da Silva Filho, Marcello Ferreira. – 1.ed. – Brasília, DF : Universidade de Brasília, 2021.
35 p.; il.; 21 x 29 cm.

Bibliografia.
ISBN : 978-65-86721-61-4

1. Lógica matemática. I. Ferreira, Marcello. II. Título.
01-2021/42 CDD 511.3

BOAS VINDAS

Seja **bem-vindo(a**) ao curso de lógica elementar!

A leitura desse material irá lhe proporcionar a oportunidade de aprender sobre raciocínio formal e linguagem simbólica. Isso poderá ajudar você a ampliar os conhecimentos gerais, que é um dos objetos da formação superior.

Desejamos bons estudos!

SUMÁRIO

Apresentação

A Lógica é um campo particularmente interessante da Matemática e da Filosofia. Aliás, “as lógicas”, já que existem muitas lógicas diferentes (e, várias, incompatíveis entre si). Em particular, o estudo de uma lógica pode ser uma alternativa única para introduzir um modo mais formal de raciocinar, certamente perpassado pela questão da simbolização e da formalização, e da aderência a regras rígidas para o pensamento.

Não se assuste com tanta informação! Este é um curso introdutório, mais simples, em que você estudará apenas uma pequena parte da lógica formal clássica, exatamente a parte chamada **Lógica Proposicional Clássica**.

Assim, ao mesmo tempo que objetiva o desenvolvimento dos elementos já mencionados, mantivemos o conteúdo em um mínimo de modo a ser possível cobri-lo em um pequeno intervalo de tempo de aproximadamente duas semanas.

Para que você possa utilizar este texto da melhor maneira possível, apresentamos a seguir uma legenda com os ícones que chamarão sua atenção para alguma atividade importante ao longo do texto.

Este ícone aponta para a oportunidade de se fazer uma pesquisa (na internet ou em outro canal de informações) para expandir ainda mais seus conhecimentos sobre o tema que está sendo discutido.

Este ícone apresenta uma videoaula sobre o tema da seção em que ele está inserido. Apresenta, assim, explicações em vídeo sobre o assunto da seção.

Este ícone representa um botão interativo. Ao clicar você revela alguma informação. Um exemplo de utilização é para demonstrar a solução de um problema.

Esperamos que o curso possa trazer a você novos conhecimentos, assim como ajudá-lo no processo de aprendizagem! Bons Estudos.

Lógica proposicional: linguagem

Vamos começar tratando da linguagem da Lógica Proposicional.

Com o estudo dessa parte da lógica formal clássica, pretendemos começar a mostrar como é possível utilizar uma notação simbólica para reescrever discursos emitidos em **linguagem natural**. Mais ainda, vamos mostrar como é possível, com a aplicação de métodos adequados de análise, proceder a uma investigação sistemática do caráter de verdade ou falsidade das sentenças que compõem tais discursos.

Ao final deste estudo, você deverá ser capaz de:

- reconhecer os elementos que constituem o alfabeto da lógica proposicional;
- identificar uma fórmula bem formada escrita na linguagem da lógica proposicional;
- traduzir uma fórmula bem formada da lógica proposicional para a linguagem natural;
- traduzir uma sentença da linguagem natural para a lógica proposicional; e
- interpretar uma sentença da lógica proposicional.

1. O ALFABETO DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Assista o vídeo com a apresentação do alfabeto da lógica proposicional.

O estudo da lógica proposicional depende, crucialmente, de que você desenvolva rapidamente sua capacidade de simbolização. O elemento básico que nos fornece essa possibilidade é o alfabeto. Assim, é preciso começar este estudo a partir da definição básica de um alfabeto para a lógica proposicional.

Depois, será necessário definir uma sintaxe, ou seja, um conjunto de regras que diferencie construções linguísticas bem formadas, feitas utilizando-se o alfabeto e compatíveis com certas regras gramaticais, das mal formadas, e também uma semântica, que permite interpretar as fórmulas bem formadas em termos de seus valores de verdade. Comecemos, pelo alfabeto:

O alfabeto da lógica proposicional é constituído por:

- Símbolos de pontuação: "(", ")";
- Constantes lógicas (ou símbolos de verdade)

1. V: lê-se "verdadeiro";
2. F: lê-se "falso";

- Símbolos proposicionais: **p, q, r, s, p^1, q^1, r^1, s^1**...;

- Conectivos proposicionais:

1. **¬p**: lê-se "não p";
2. **p v q**: lê-se "p ou q";
3. **p ^ q**: lê-se "p e q";
4. **p → q**: lê-se "se p então q";
5. **p ↔ q**: lê-se "p se, e somente se, q".

O ALFABETO DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Note que o alfabeto da lógica proposicional, ao contrário dos alfabetos das línguas naturais, possui infinitos símbolos (devido aos símbolos proposicionais e seus índices). Isso se dá, basicamente, pelo caráter formal das análises que interessam à lógica.

Há ainda outra razão interessante: os símbolos **p, q** etc. são símbolos que representam proposições, ou seja, basicamente são frases que podem assumir valor de verdade igual a verdadeiro ou falso.

Existe uma infinidade de proposições que podemos formar. Isso difere das letras do alfabeto do português, por exemplo, que são em número finito, mas que podem ser utilizadas em combinação para formar infinitas palavras.

O processo de formalização se constitui pela associação de uma proposição qualquer (e.g. “Paulo é um bom aluno” etc.) a um símbolo proposicional, como **p**, justamente para que seja possível manipular esse símbolo independentemente do conteúdo a ele associado, ou seja, do estado de coisas específico que a ele se atribua.

Já os conectivos proposicionais introduzem algum tipo de relação entre a linguagem natural e a simbolização da mesma, uma vez que tais conectivos pretendem ser uma representação simbólica de (pelo menos) uma leitura (possível) das conjunções.

(I) aditivas: “e”,

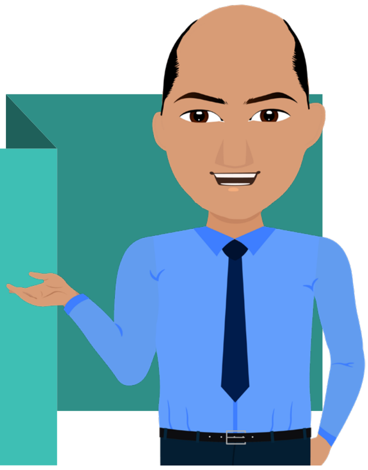
(II) alternativas: “ou”,

(III) conclusivas: “se... então...” e do

(IV) advérbio de negação: “não”.

Se pudermos fornecer a tais conectivos proposicionais regras pelas quais eles possam ser manipulados especificamente quanto à sua veracidade ou não (seu valor de verdade), então teremos descoberto o funcionamento lógico de uma parte das línguas naturais que utilizam esses conectivos. É interessante notar, entretanto, que as línguas naturais se constituem a partir de uma gama muito mais extensa de elementos do que os acima apresentados. Assim, por exemplo, temos as construções feitas a partir das conjunções adversativas (e.g. ‘mas’, ‘porém’, ‘todavia’ etc.).

Usualmente, afirma-se que o conectivo “e”, por exemplo, é capaz de captar o funcionamento da conjunção “mas”. Assim, a oração “Paulo é um bom aluno, mas não tem estudado muito” teria o mesmo conteúdo lógico da proposição “Paulo é um bom aluno e não tem estudado muito” (onde “e”, aqui, é o conectivo lógico já introduzido).

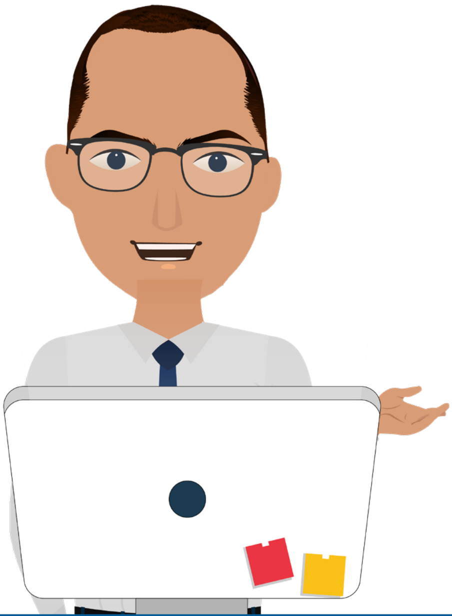


A questão (complexa) é saber se, de fato, o conteúdo veiculado pela primeira oração é o mesmo que o veiculado pela segunda. Parece-nos que existe, na primeira oração, algo que a segunda não capta, que é a contraposição entre os conteúdos semânticos de “ser bom aluno” e “não estudar muito”. As línguas naturais são pródigas em introduzir esses elementos para fins de: ênfase, introdução de pressupostos textuais etc.

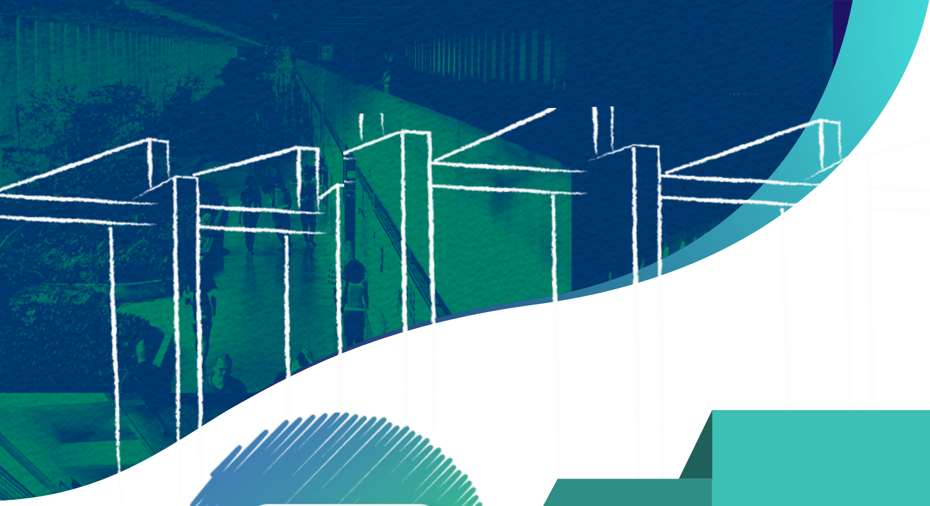
De fato, parece-nos que a primeira oração introduz uma segunda proposição (elidida) equivalente a “se alguém é um bom aluno, então deve estudar muito”, e que está absolutamente ausente da proposição formada utilizando-se o conectivo “e”. A questão, entretanto, se torna complexa quando se deseja saber até que ponto tais conteúdos semânticos das línguas naturais são necessários para a atribuição de valores de verdade (conteúdos lógicos) à proposição e suas combinações, pois é com a atribuição (ou o cálculo) de valores de verdade às proposições e aos argumentos que a lógica formal se preocupa.

Acreditamos que a compatibilidade dos conteúdos semânticos com os conteúdos lógicos dependa do tipo de argumento e dos tipos de inferências que pretendemos fazer.

Muitas vezes, mesmo no uso de orações encadeadas na língua natural, está-se interessado em retirar delas seus conteúdos de verdade, implicando maior grau de adequação à tradução lógico-simbólica. No que se segue, estaremos sempre supondo que os âmbitos de análise em que nos colocamos são sempre aqueles que permitem tal tradução. As constantes lógicas devem comparecer no nosso sistema para que possamos nos referir a elementos sintáticos como “a verdade” ou “a falsidade”.



Por exemplo, intuitivamente (por enquanto, ao menos), podemos inferir de uma proposição do tipo **p** → **F** que deve ser uma proposição falsa (independentemente do seu conteúdo), visto que queremos dizer com **p** → **F** que, da proposição, sempre tiramos conclusões falsas (então, não poderia ser verdadeiro em nenhum caso). Voltaremos a essas questões mais adiante.



2. A SINTAXE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Assista o vídeo com a apresentação da sintaxe da lógica proposicional.

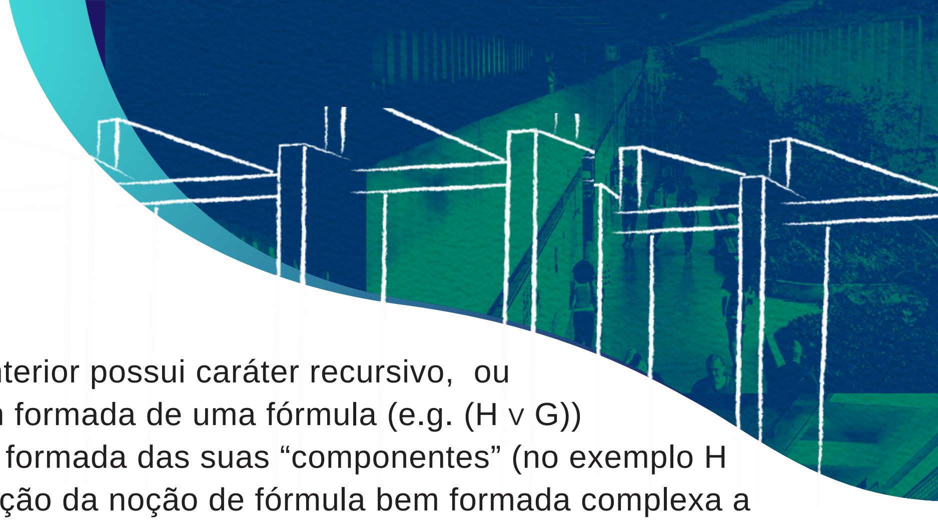
Assim como no português, bem como em qualquer outra língua natural, a lógica proposicional conta com certas regras que permitem combinar os elementos do alfabeto nas chamadas fórmulas bem formadas (“fbf”, em português, e wff, well-formed formulas, em inglês). Tais regras, basicamente, introduzem uma sintaxe ao sistema, que, até este ponto, contava apenas com um alfabeto.

Assim como certas combinações dos elementos do alfabeto são inaceitáveis em uma dada língua natural, também na lógica proposicional algumas combinações de elementos de seu alfabeto não são permitidas. As regras que definem as combinações permitidas são precisamente aquelas que definem as fbfs. Essas regras estão apresentadas na definição a seguir.

Definição: as fórmulas da linguagem da lógica proposicional são construídas a partir dos símbolos do alfabeto, com o uso das seguintes regras:

Todas as constantes lógicas e os símbolos proposicionais são fbfs;

- Se **H** é uma fórmula bem formada, então (¬**H**) é fbf;
- Se **H** e **G** são fórmulas bem formadas, então (**H** ∨ **G**) é fbf;
- Se **H** e **G** são fórmulas bem formadas, então (**H** ^ **G**) é fbf;
- Se **H** e **G** são fórmulas bem formadas, então (**H** → **G**) é fbf;
- Se **H** e **G** são fórmulas bem formadas, então (**H** ↔ **G**) é fbf.



Note ainda que a definição anterior possui caráter recursivo, ou seja, a definição de fórmula bem formada de uma fórmula (e.g. $(H \vee G)$) utilizou a noção de fórmula bem formada das suas “componentes” (no exemplo H e G). Basicamente, é uma definição da noção de fórmula bem formada complexa a partir de fórmulas bem formadas mais simples.

É importante, pois, fornecer uma definição precisa do que sejam essas “fórmulas mais simples”.

Definição: dada uma fórmula bem formada H, temos:
H é subfórmula bem formada de **H**;

Se **H** = (**¬G**), então **G** é uma subfórmula bem formada de **H**;

Se **H** = (**G** ∨ **E**), (**G** ^ **E**), (**G** → **E**), ou (**G** ↔ **E**), então tanto **G** quanto E são subfórmulas bem formadas de **H**.

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo: Nos exemplos a seguir as expressões são fórmulas bem formadas (fbf) da lógica proposicional? Identifique todas as subfórmulas da fórmula dada, quando for o caso. Quando a expressão não for uma fbf, reescreva-a como uma fbf:

$$H = ((p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow ((\neg p1) \vee (p2 \rightarrow (q2 \leftrightarrow (\neg r)))));$$

$$G=(p \rightarrow \neg r);$$

$$E=(p \vee q \rightarrow r \vee s);$$

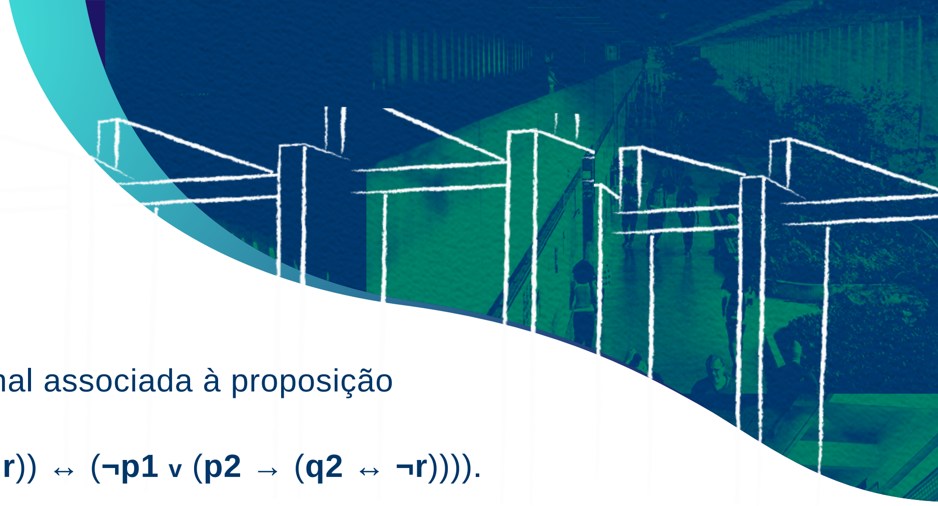
Solução

- É fbf. Temos as subfórmulas bem formadas: $p, p1, p2, q2, r, q, (\neg p1), (\neg r), (q \vee r), (q2 \leftrightarrow (\neg r)), (p \rightarrow (q \vee r)), (p2 \leftarrow (q2 \leftrightarrow (\neg r))), H$;
- Não é fbf. Deveria haver um par de parênteses englobando a expressão $\neg r$. Entretanto, é usual não considerar esses parênteses como necessários, assumindo-se uma prioridade do conectivo $\neg$ sobre todos os demais. Assim, poderíamos ainda considerar G como uma fbf, desde que assumíssemos essa convenção (o que faremos no que se segue). De qualquer modo, G poderia ser escrita como $(p \rightarrow (\neg r))$;
- Não é fbf. Também estão faltando parênteses nessa fórmula. Note, porém, que aqui pode haver grande ambiguidade, visto que podemos obter fórmulas distintas, dependendo de como coloquemos os parênteses (ou da regra de precedência que adotemos). Poderíamos escrever E como: (i) $((p \vee q) \rightarrow (r \vee s))$ ou (ii) $(p \vee ((q \rightarrow r) \vee s))$, ou ainda $((p \vee (q \rightarrow r)) \vee s)$. Como dissemos, temos também regras de precedência para as interações entre os conectivos $\rightarrow$ e $\vee$ (entre outros), mas não as adotaremos aqui. Assim, para termos uma fbf, devemos colocar os parênteses em uma das formas mostradas anteriormente.

Podemos representar uma fórmula também fazendo o uso de árvores. Nessa representação, os nós das árvores são ocupados por conectivos, enquanto que os nós terminais (ou folhas) são ocupados pelos símbolos proposicionais, sem a presença de qualquer conectivo.

Cada trecho da árvore, que vai do nó principal até um nó terminal, é chamado de “ramo da árvore”. Pode haver também ramos que ligam entre si dois ou mais nós quaisquer, que seriam os sub-ramos dos ramos da árvore. Os ramos das árvores estabelecem a maneira como os conectivos estruturam uma fórmula.

Essa representação em termos de árvores nos será bastante útil mais adiante para demonstrar alguns resultados importantes da lógica proposicional. Ela servirá de fundamento para um método de demonstração chamado “demonstração por *tableaux*”. Assim, é interessante que o conceito de árvore e aqueles a ele vinculados estejam muito claros para você. A seguir, apresentamos um exemplo em que é mostrada também a árvore relativa a uma proposição complexa.

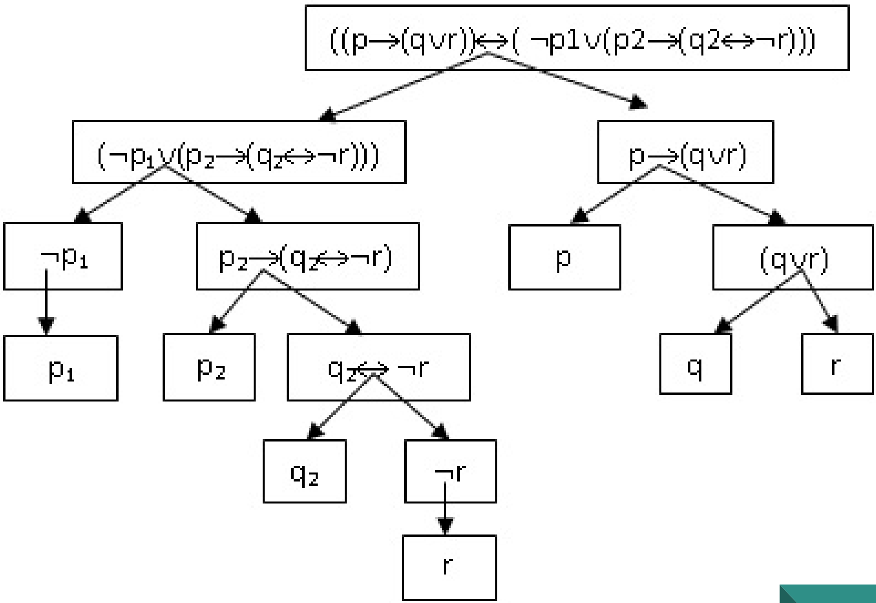


Exemplo

Construa a árvore proposicional associada à proposição

$$((p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (\neg p1 \vee (p2 \rightarrow (q2 \leftrightarrow \neg r)))).$$

Solução: a solução está indicada na figura a seguir:



Finalmente, veja se, com o que você já aprendeu, consegue resolver o problema a seguir:

Problema: utilize a representação em árvore para provar que se **H** é fórmula e **G** é subfórmula de **H**, então toda subfórmula de **G** é subfórmula de **H**.

Tente resolver primeiro, depois confira no gabarito:

3. SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Assista o vídeo com a apresentação da semântica da lógica proposicional.

Agora que já tratamos dos elementos sintáticos do nosso sistema de lógica formal, é preciso introduzir seus correlatos semânticos. Já ressaltamos que as lógicas são linguagens, assim como as línguas naturais, e que, portanto, necessitam de uma definição de significado que seja adequada aos elementos que as compõem e aos seus interesses específicos.

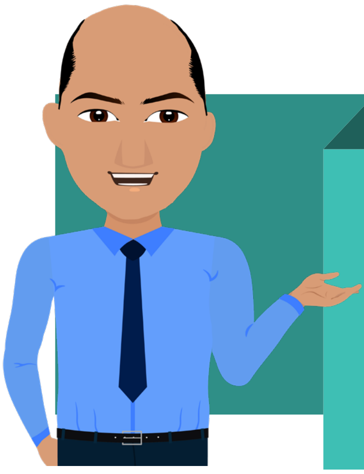
Duas perguntas surgem dessas primeiras considerações:

1. **Em que tipo de significado a lógica formal está interessada?**
2. **Estamos falando de que elementos?**

A primeira pergunta pode ser facilmente respondida, se nos lembrarmos de que estamos interessados em analisar os conteúdos de verdade de certos raciocínios ou argumentos.

Assim, a semântica da lógica proposicional vai se limitar a trabalhar com valores de verdade. Dessa maneira, dar o significado de certa proposição é interpretá-la de tal modo a fornecer seu valor de verdade.

A SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL



A segunda pergunta pode ser respondida se lembrarmos que definimos o alfabeto da lógica proposicional e àquela na quale definimos a sintaxe do sistema.

São precisamente os símbolos do alfabeto que devem ser interpretados, pois uma semântica implica necessariamente uma interpretação.

Já definimos os elementos básicos de nosso formalismo (por enquanto), que são: os símbolos proposicionais, as constantes lógicas e os conectivos.

Assim, uma semântica deverá fornecer-nos um *mecanismo simbólico* pelo qual possamos atribuir a uma dada fórmula bem formada complexa da lógica, ou também a um argumento, o seu valor de verdade. Isso deve ser possível de se fazer com base apenas nos valores de verdade dos elementos constitutivos mais básicos das fbfs, que são as proposições e as constantes lógicas, e no funcionamento dos conectivos.É esse caráter *composicional* da lógica formal (e de outras) que dá à mesma o seu imenso poder.

4. DICAS DE TRADUÇÃO

Assista o vídeo com a apresentação de dicas de tradução da linguagem natural (português) para a linguagem da lógica proposicional.

A tradução de um texto escrito em uma língua natural qualquer para a linguagem simbólica da lógica proposicional não segue um padrão mecânico. Entretanto, podemos dar algumas dicas que, na grande maioria das vezes, funcionam bem.

- **Devemos traduzir sempre ‘mas’, ‘porém’, ‘embora’ (e outros elementos adversativos) como ‘e’, como nos exemplos a seguir:**

- Embora João tenha estudado, saiu-se mal na prova: (**j ^ s**) [=João estudou (j) e saiu-se mal na prova (s)];
- João estudou, mas saiu-se mal na prova: (**j ^ s**);

- **Devemos traduzir ‘a menos que’ por ‘ou’, como no exemplo a seguir:**

João morrerá, a menos que (João) se alimente corretamente: **(j v m)** [=João se alimenta corretamente ou João morrerá];

- Se encontrarmos a frase **p** é suficiente para **q,** devemos traduzi-la por **p** → **q;**
- Se encontrarmos a frase **p** é necessário para **q,** devemos traduzi-la por **¬ p** →**¬ q;**
- Se encontrarmos a frase **p é** necessário e suficiente para **q,** devemos traduzi-la por **p** ↔ **q;** como nos exemplos a seguir:

- Para que João passe de ano é suficiente que (João) estude: (**j** → **p**) [=João estuda → João passa de ano];
- Para que João passe de ano é necessário que (João) estude: (**¬j** → **¬p**) [=João não estudar → João não passar de ano];

Há, evidentemente, muitas outras situações em que traduções podem ser adiantadas da forma como fizemos. Entretanto, as que já apresentamos dão uma ideia de como isso pode ser feito no caso mais geral, de modo que deixamos ao leitor outras possibilidades de simbolização.

5. A FUNÇÃO INTERPRETAÇÃO

Assista o vídeo que introduz a função interpretação, pela qual se pode efetivar a semântica da lógica proposicional.

Do que vimos até agora, fica claro que é preciso um aparato formal que possibilite, dada uma fbf da lógica, fornecer a cada um dos elementos que a constitui seu valor de verdade e, ao mesmo tempo, obter dessa informação o valor de verdade da composição que é realizada pela fbf.

O que precisamos, portanto, é de uma função que receba como elementos do seu domínio fbfs, e que contenha, no seu contradomínio, os dois valores de verdade possíveis na lógica formal (que é bivalente). Assim, a função interpretação pode ser definida como:

Definição: a função interpretação de uma fórmula bem formada:

A interpretação da fbf H, simbolizada por $\mathcal{I}[H]$, é uma função que tem por domínio o conjunto infinito das fbfs da lógica proposicional e que tem por contradomínio o conjunto {V, F}, ou seja,

$$\mathcal{I}: \mathbf{C} \rightarrow \{V, F\},$$

em que **C** é o conjunto infinito das fbfs da lógica formal.

Agora que temos essa função interpretação, podemos definir a maneira pela qual ela atua sobre os diversos elementos de nosso alfabeto.

Definição: a interpretação dos diversos elementos do alfabeto é dada por (H e G são fbfs):

I [V]=V, I [F]=F;

Se p é símbolo proposicional, então I [p] ∈ {V, F};

Se H=¬G, então

I [H]=V see I[G]=F;
I [H]=F see I[G]=V;

Se H=G ∨ R, então

I [H]=F see I [G]=F e I [R]=F;
I [H]=V see I [G]=V ou I [R]=V;

Se H=G ∧ R, então

I [H]=F see I [G]=F ou I [R]=F;
I [H]=V see I [G]=V e I [R]=V;

Se H=G → R, então

I [H]=F see I [G]=V e I [R]=F;
I [H]=V see I [G]=F ou I [R]=V;

Se H=G ↔ R, então

I [H]=V see I [G]=I[R];
I [H]=F see I [G]≠I[R].

* Em matemática usa-se “see” para simplificar “se, e somente se” que tem uma função lógica diferente de “se”.

Assim, definimos a atuação da função interpretação sobre os elementos do alfabeto (símbolos proposicionais e constantes lógicas, bem como conectivos lógicos), restando mostrar como essa definição pode nos guiar na análise de fórmulas complexas.

A própria definição anterior nos dá essa dica, quando se estabelece a partir de uma definição recursiva (uma vez que utiliza a noção de fórmula quando vai estabelecer a definição dos conectivos lógicos).

O exemplo a seguir mostra como a análise do valor de verdade (a interpretação) de uma fórmula pode ser estabelecida a partir dos valores de verdade de seus constituintes mais básicos.

Exemplo: diga quando o valor de verdade da proposição complexa $((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{r} \vee (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})))$ será verdadeiro. Faça o mesmo para o valor de verdade falso. Diga então qual o valor de verdade desta proposição complexa, sabendo que $\mathcal{I}[\mathbf{p}]=\mathbf{V}$, $\mathcal{I}[\mathbf{q}]=\mathbf{F}$, $\mathcal{I}[\mathbf{r}]=\mathbf{F}$.

Solução: das definições anteriores temos que:

$\mathcal{I}[((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{r} \vee (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})))]=\mathbf{F}$ see $\mathcal{I}[(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})]=\mathbf{V}$ e $\mathcal{I}[(\neg \mathbf{r} \vee (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p}))]=\mathbf{F}$. Mas, sabemos que $\mathcal{I}[(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})]=\mathbf{V}$ see $\mathcal{I}[\mathbf{p}]=\mathbf{V}$ e $\mathcal{I}[\mathbf{q}]=\mathbf{V}$. Da mesma forma $\mathcal{I}[(\neg \mathbf{r} \vee (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p}))]=\mathbf{F}$ see $\mathcal{I}[(\neg \mathbf{r})]=\mathbf{F}$ e $\mathcal{I}[(\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})]=\mathbf{F}$; assim, devemos ter $\mathcal{I}[\mathbf{r}]=\mathbf{V}$. Entretanto, da última expressão $\mathcal{I}[(\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})]=\mathbf{F}$ tiramos que $\mathcal{I}[\mathbf{q}]\neq\mathcal{I}[\mathbf{p}]$. Mas sabemos que $\mathcal{I}[\mathbf{p}]=\mathcal{I}[\mathbf{q}]=\mathbf{V}$, de modo que não é possível que tenhamos todas os requisitos satisfeitos para que $\mathcal{I}[((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{r} \vee (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})))]=\mathbf{F}$. Como só resta uma única possibilidade, temos que $\mathcal{I}[((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{r} \vee (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})))]=\mathbf{V}$ sempre. Proposições que são sempre verdadeiras, independentemente do valor de verdade de seus constituintes, são ditas tautologias. Note que nem precisamos saber $\mathcal{I}[\mathbf{p}]$, $\mathcal{I}[\mathbf{q}]$ ou $\mathcal{I}[\mathbf{r}]$ para dizer que a interpretação de toda a proposição é **V**.

Deixamos, agora, para você, um exemplo de aplicação dos desenvolvimentos feitos até aqui.

Problema: repita o exemplo anterior para a fórmula

$$((\mathbf{p} \lor (\mathbf{q} \land (\neg \mathbf{r}))) \rightarrow ((\neg \mathbf{p}) \land (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}))).$$

Solução: Suponha, então, que o antecedente é verdadeiro. Se o antecedente é verdadeiro, então **p** é verdadeiro ou **q** e **¬r** são ambos verdadeiros, ou seja, **q** é verdadeiro e **r** é falso. Suponha primeiro que **p** é verdadeiro, então **¬p** é falso e a conjunção do consequente é falsa. Assim, teremos um antecedente verdadeiro e um consequente falso, indicando que a implicação é falsa. Desta maneira, a implicação será falsa sempre que **p** for verdadeiro. Suponha, agora, que **q** é verdadeiro e **r** é falso. Então $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$ é falso, e a conjunção do consequente será falsa. Assim, novamente, teremos um antecedente verdadeiro e um consequente falso, dizendo que a implicação lógica é, no seu total, falsa. Como esgotamos as maneiras de o antecedente ser verdadeiro e o consequente também, então, para que a implicação lógica seja verdadeira, o antecedente deve ser falso. Isso só será verdade se **p** for falso e (**q** e (**¬r**)) for falso também. Ou seja, se **p** for falso e **q** for falso ou se **p** for falso e **r** for verdadeiro. Isso esgota todas as situações em que a proposição é verdadeira. No quadro abaixo, escrevemos as possibilidades:

	Antecedente	O consequete	A proposição
Antecedente verdadeiro	**p** verdadeiro	Consequente falso	Falsa
	q verdadeiro e **r** falso	Consequente falso	Falsa
Antecedente falso	**p** é falso e **q** falso	Não importa o consequente	Verdadeira
	P é falso e **r** é verdadeiro	Não importa o consequente	Verdadeira

O que é interessante é que poderíamos "resumir" essas condições em uma tabela que cobriria todas as possibilidades. Vejamos a tabela a seguir

p	q	r	$((p \vee (q \wedge (\neg r))) \rightarrow ((\neg p) \wedge (q \rightarrow r)))$
V	V	V	F (**p** é verdadeiro)
V	V	F	F (**p** é verdadeiro)
V	F	V	F (**p** é verdadeiro)
V	F	F	F (**p** é verdadeiro)
F	V	V	V (**p** é falso e **r** é verdadeiro)
F	V	F	F (**p** é falso e **q** é verdadeiro e **r** é falso)
F	F	V	V (**p** é falso e **r** é verdadeiro)
F	F	F	V (**p** é falso e **q** é falso)

Note que cobrimos todas as combinações possíveis entre p, q e r.

Existem modelos mais diretos de análise de fórmulas complexas quanto à sua interpretação.

A seguir, vamos abordar um deles.

6. TABELAS VERDADE

Assista o vídeo que introduz as tabelas verdade; uma forma de concretizar, de maneira mecânica, a função interpretação da lógica proposicional.

No intuito de tornar mais direta e mecânica a análise de fórmulas complexas da lógica proposicional, alguns construtos formais podem ser definidos. Vamos agora a estudar um deles: o método das tabelas verdade.

As tabelas verdade apenas colocam em forma tabular aquilo que já apresentamos na definição de função interpretação. Sua forma de apresentação, entretanto, garante uma transparência muito maior dos procedimentos de análise de uma fórmula complexa qualquer. Para vermos isso, considere o exemplo a seguir.

Exemplo: mostre que a fórmula $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ é sempre verdadeira, independentemente dos valores de verdade dos símbolos proposicionais que a compõem.

Soluções: ora, queremos mostrar que $\Im[(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)] = F$ é impossível. Mas

$$\Im[(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)] = F \text{ see}$$
$$(\Im[p \to q] = V \text{ e } \Im[\neg q \to \neg p] = F)(^*) \text{ ou } (\Im[p \to q] = F \text{ e } \Im[\neg q \to \neg p] = V)\,(^{**})$$

Mas

$$(^*)\Im[p \to q] = V \text{ e } \Im[\neg q \to \neg p] = F \text{ see } (\Im[p] = F \text{ ou } \Im[q] = V) \text{ e } (\Im[\neg q] = V \text{ e } \Im[\neg p] = F)$$

$$(^{**})\,\Im[p \to q] = F \text{ e } \Im[\neg q \to \neg p] = V \text{ see } (\Im[p] = V \text{ e } \Im[q] = F) \text{ e } (\Im[\neg q] = F \text{ ou } \Im[\neg p] = V)$$

Entretanto, nenhuma das possibilidades associadas às linhas (*) e (**) pode, de fato, ocorrer. No primeiro caso temos

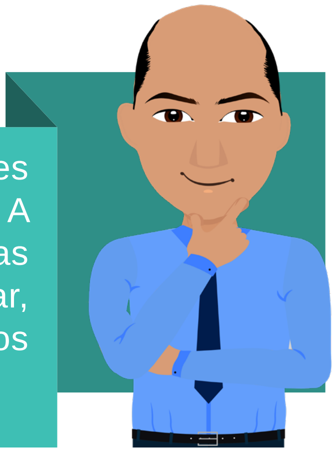
$$(^*)\,(\Im[p] = F \text{ ou } \Im[q] = V) \text{ e } (\Im[q] = F \text{ e } \Im[p] = V) \text{ o que é um absurdo;}$$

enquanto que, no segundo caso, temos

$$(^{**})\,(\Im[p] = V \text{ e } \Im[q] = F) \text{ e } (\Im[q] = V \text{ ou } \Im[p] = F) \text{ o que também é um absurdo.}$$

Assim, ambas as possibilidades relacionadas com a falsidade da fórmula implicam absurdos lógicos, o que quer dizer que a fórmula não pode ser falsa. Note que os valores de verdade da última coluna foram obtidos dos valores de verdade das duas colunas hachuradas em amarelo.

Note que, no exemplo anterior, não é simples perceber os dois absurdos mencionados. A seguir, vamos apresentar o método das tabelas verdade e mostrar como elas podem simplificar, em certo sentido, alguns dos elementos discutidos anteriormente.



De fato, as definições anteriores para a interpretação dos conectivos ficam dadas, em formato de tabelas verdade, como apresentado nas tabelas a seguir.

- **Para o conectivo “não”:**

Tabela do conectivo "não" ($\neg$).

p	$\neg$p
V	F
F	V

- **Para o conectivo “e”:**

Tabela do conectivo "e" ($\wedge$).

p	q	p$\wedge$q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Para o conectivo “ou”:**

Tabela do conectivo "ou" ($\vee$).

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Para o conectivo "se... então":**

Tabela do conectivo "se... então..." (→).

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Para o conectivo "se... e somente se..."**

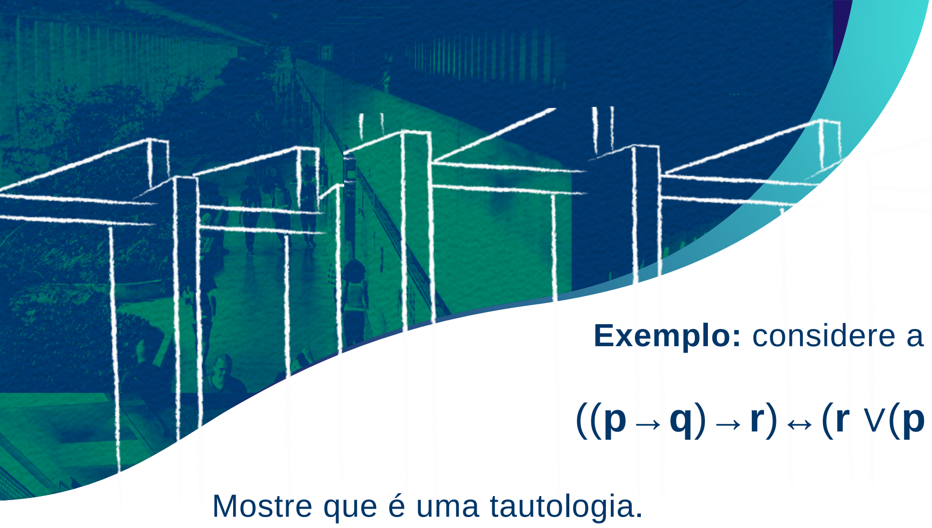
Tabela do conectivo "se... e somente se..." (↔).

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

As tabelas exauriram completamente as possibilidades de se atribuir valores de verdade aos seus constituintes mais básicos (dois para a negação, que é um operador unário, quatro para os demais, que são operadores binários).

Note que uma proposição que tenha **n** símbolos proposicionais diferentes será representada por uma tabela verdade contendo 2^n linhas. Esse é, aliás, um dos problemas com o método das tabelas verdade, como discutiremos a seguir.

A partir dessas tabelas verdade, é fácil obter o valor de verdade de qualquer proposição complexa, baseando-se nos valores de verdade de seus constituintes mais básicos. O exemplo a seguir mostra como isso pode ser realizado.



Exemplo: considere a proposição

$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow (r \vee (p \wedge \neg q)).$$

Mostre que é uma tautologia.

Soluções: para tanto, basta fazer a tabela verdade associada à proposição em questão. Como são três símbolos proposicionais distintos, teremos oito linhas na tabela. As oito possibilidades de combinação de valores de verdade dos símbolos proposicionais **p**, **q** e **r** são dadas abaixo, bem como suas combinações nos constituintes das diversas colunas.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$((p \rightarrow q) \rightarrow r)$	$p \wedge \neg q$	$r \vee (p \wedge \neg q)$	proposição
V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V

Nessa tabela, “proposição” representa a proposição completa. Note que só constam valores de verdade **V** para a última coluna, implicando que a proposição considerada só pode assumir valores de verdade **V**, independentemente dos valores de verdade dos símbolos proposicionais que a compõem. Note também que a análise da fórmula completa foi feita a partir das análises sucessivas de suas subfórmulas.

O método de tabelas verdade, ainda que sempre forneça o resultado desejado, padece de um problema prático quanto à aplicação: *ele é desnecessariamente laborioso*. Para contornar esse problema, podemos citar dois outros métodos que também são utilizados para avaliar o valor de verdade de proposições complexas. Esses métodos avaliam o valor de verdade de proposições complexas, geralmente, com muito menos passos do que aqueles exigidos por uma demonstração usando tabelas verdade. São conhecidos pelos nomes de *método de árvores semânticas e método de redução ao absurdo*. Entretanto, por se este um curso apenas introdutório e elementar, não vamos apresentar os outros dois métodos.

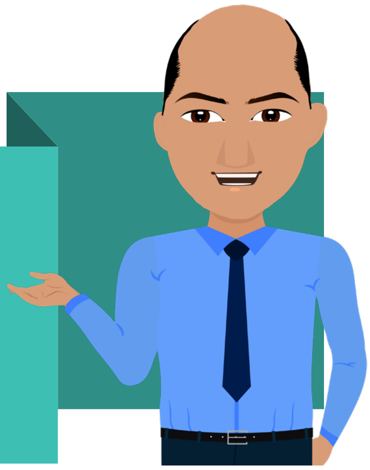
7. CIRCUITOS ELÉTRICOS E ELETRÔNICOS

Existe uma relação direta entre a lógica proposicional e os circuitos eletrônicos modernos. De fato, as chamadas portas lógicas implementam justamente a lógica proposicional formal. Isso ocorre porque, nos circuitos eletrônicos, interessa saber apenas se por um "fio" específico passa ou não corrente. Assim, podemos fazer a relação

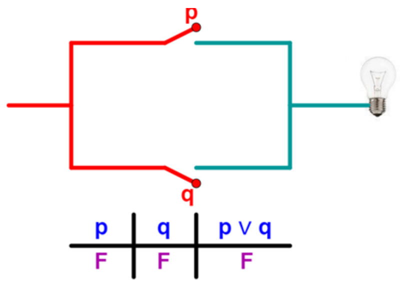
$$0 \text{ volts} \leftrightarrow \text{Falso}$$
$$+5 \text{ volts} \leftrightarrow \text{Verdadeiro}$$

e as portas lógicas nos ajudam a obter, a partir de combinações suas, os valores de verdadeiro ou falso que desejarmos.

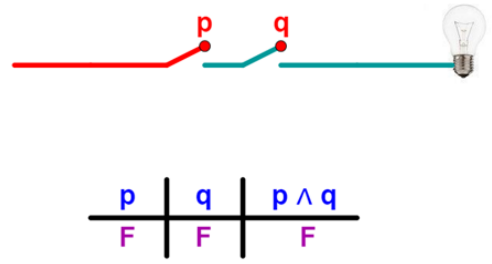
Desse modo, para cada um dos conectivos lógicos E, OU e NÃO, existe uma porta lógica correspondente. Os conectivos SE...ENTÃO e SE...E SOMENTE SE não possuem porta lógica correspondente. Você consegue imaginar o porquê? Vejamos essa relação entre portas lógicas e conectivos nos aplicativos a seguir:



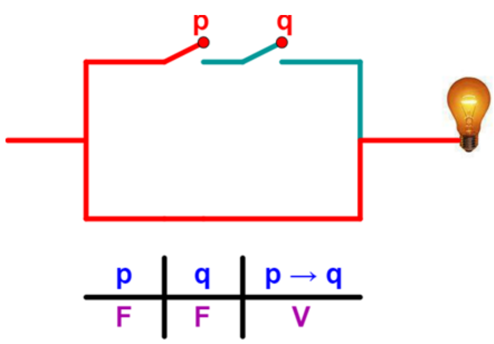
Conectivo "OU":

LOCAL:	**Autor:** Nelson Lillo Terán. **Aplicativo em: https://www.geogebra.org/m/gvxkqU9N**
	
Descrição:	Este aplicativo implementa o conectivo "disjunção" OU. Movimente os pontos vermelhos para fechar ou abrir o circuito e ver em qual situação a lâmpada acende. Então, compare o resultado com o que sabe sobre o conectivo OU.
Representação:	O símbolo em eletrônica para a porta lógica OU é:  Assim, se inserirmos uma voltagem em qualquer um dos pinos à esquerda, teremos essa voltagem no pino à direita. Se ambos os pinos à esquerda estiverem sem voltagem (0 volts), então o pino à direita também estará a 0 volts.

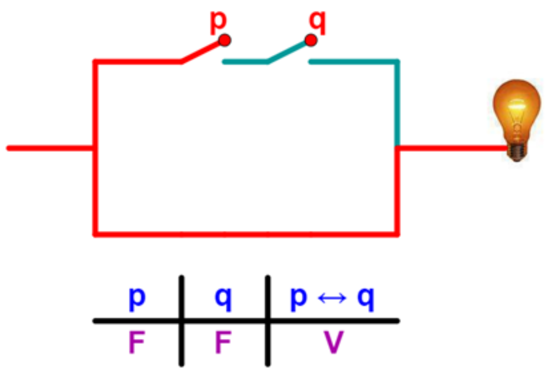
Conectivo “E”:

LOCAL:	**Autor: Nelson Lillo Terán. Aplicativo em: https://www.geogebra.org/m/E79FWpZF**
	
Descrição:	Este aplicativo implementa o conectivo "conjunção" E. Movimente os pontos vermelhos para fechar ou abrir o circuito e ver em qual situação a lâmpada acende. Então, compare o resultado com o que sabe sobre o conectivo E.
Representação:	O símbolo em eletrônica para a porta lógica E é:  Assim, se qualquer um dos pinos à esquerda (ou ambos) estiverem a 0 volts, então o pino à direita estará a 0 volts. Se ambos os pinos apresentarem voltagem, então essa voltagem estará também no pino à direita.

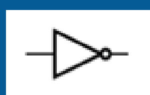
Conectivo “SE.... ENTÃO...”:

LOCAL:	**Autor: Nelson Lillo Terán. Aplicativo em: https://www.geogebra.org/m/ay2KSF9d**
	
Descrição:	Este aplicativo implementa o conectivo “implicação material” SE... ENTÃO.... Movimente os pontos vermelhos para fechar ou abrir o circuito e ver em qual situação a lâmpada acende. Então, compare o resultado com o que sabe sobre o conectivo SE... ENTÃO....
Representação:	Não há.

Conectivo “SE.... E SOMENTE SE...”:

LOCAL:	**Autor: Nelson Lillo Terán. Aplicativo em: https://www.geogebra.org/m/Z7r2aHCJ**
	
Descrição:	Este aplicativo implementa o conectivo “bicondicional” SE... E SOMENTE SE...”. Movimente os pontos vermelhos para fechar ou abrir o circuito e ver em qual situação a lâmpada acende. Então, compare o resultado com o que sabe sobre o conectivo SE... E SOMENTE SE...
Representação:	Não há.

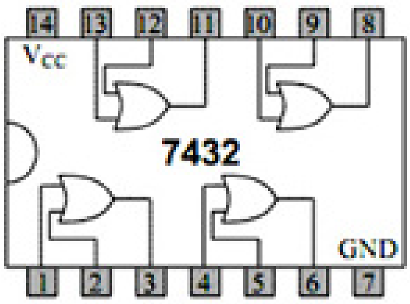
Tente agora, você mesmo, imaginar como seria o caso para o conectivo “NÃO”.

O símbolo para esse conectivo é: 

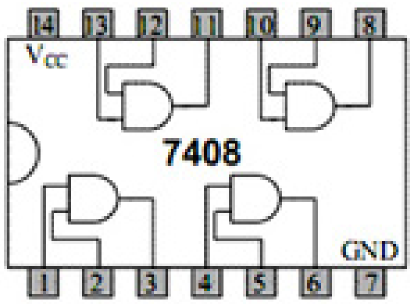
Problema: imagine um aplicativo que implementaria o conectivo NÃO nas mesmas bases daqueles que foram apresentados. Descreva-o utilizando suas próprias palavras.

Um circuito integrado nada mais faz do que ajuntar um número (muitas vezes enorme) de portas lógicas em uma única peça física, como mostra a figura a seguir:

- 4 Portas OR:

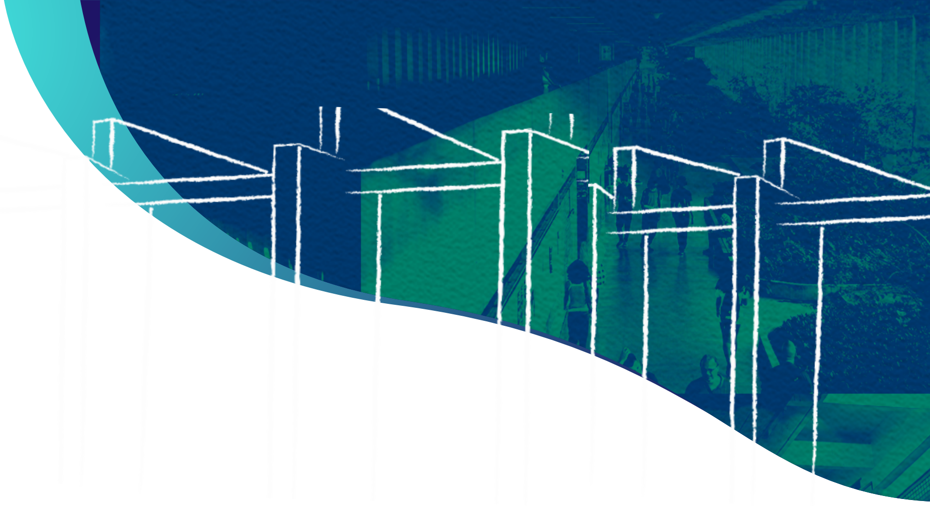


- 4 Portas AND



Agora podemos voltar à afirmação de que os conectivos SE... ENTÃO e SE...E SOMENTE SE não possuem dispositivos eletrônicos correspondentes. Isso ocorre porque é possível mostrar que esses conectivos (e, na verdade, quaisquer outros) podem ser obtidos da combinação dos conectivos NÃO, E e OU. Para além dos conectivos que estudamos, existem outros, como, por exemplo, o conectivo “XOR” (de exclusive or – ou exclusivo) e o conectivo “NAND” (de not and – nem nem).

Pesquise na internet sobre estes dois conectivos que mencionamos anteriormente: XOR e NAND. Veja como cada um deles pode ser representado por meio dos conectivos E, OU e NÃO.



ENCERRAMENTO

Vimos ao longo desse curso os elementos fundamentais da lógica formal clássica, mostrando como é possível utilizar uma notação simbólica para reescrever discursos emitidos em **linguagem natural.**

Aqui você teve a oportunidade de ver ainda que, com a aplicação de métodos adequados de análise, é possível realizar uma investigação sistemática do caráter de verdade ou falsidade das sentenças que compõem tais discursos.

Assim, esperamos que você, após esse estudo, reconheça os elementos que constituem o alfabeto da lógica proposicional; identifique uma fórmula bem formada escrita na linguagem da lógica proposicional; interprete uma sentença da lógica proposicional e, por fim, traduza uma fórmula bem formada da lógica proposicional para a linguagem natural e uma sentença da linguagem natural para a lógica.

Desejamos sucesso em sua jornada de estudos!

Apoio: Organização:

CAPES

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CEAD Centro de Educação a Distância

UnB