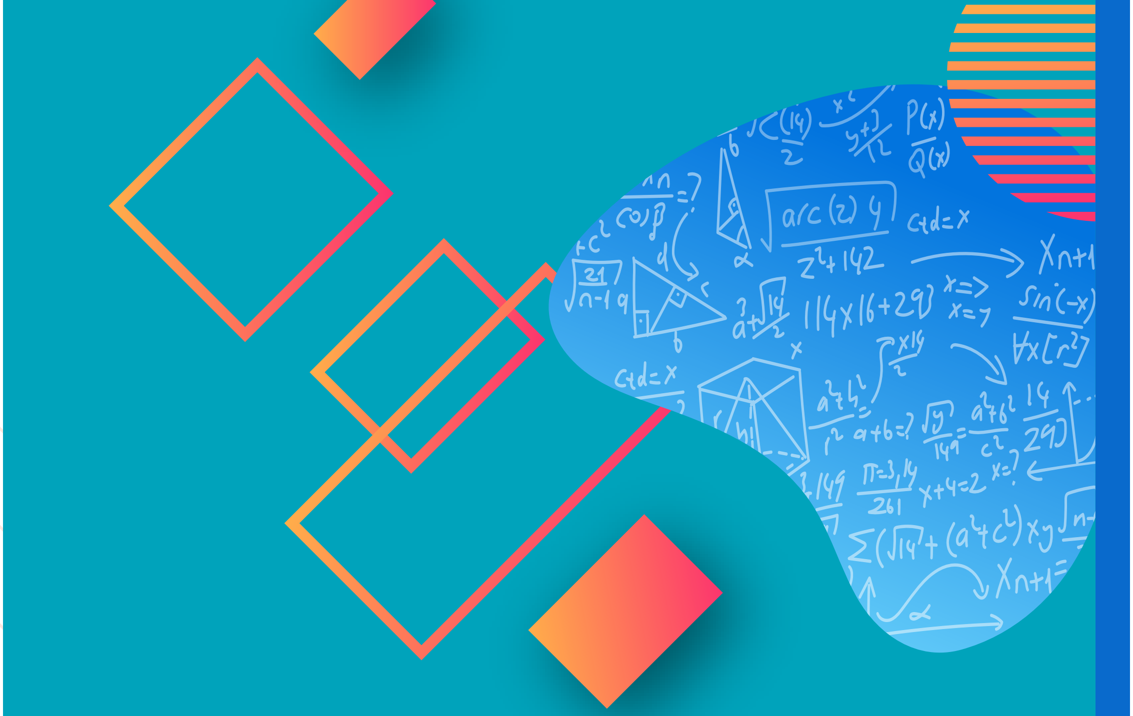


Matemática Básica

Autores:

Prof. Olavo Leopoldino da Silva Filho

Prof. Marcello Ferreira

Organização e adaptação textual:

Fabrícia Faleiros Pimenta

Apoio: CAPES

Organização: Universidade Aberta do Brasil, CEAD Centro de Educação a Distância, UnB

Ficha Técnica

Reitoria
Márcia Abrahão Moura
Reitora

Vice-Reitoria
Prof. Enrique Huelva Unternbäumen
Vice-Reitor

Decanato de Graduação
Sérgio Antônio Andrade de Freitas
Decano

Diretoria do CEAD
Letícia Lopes Leite
Diretora

Coordenação-Geral UAB
Marcello Ferreira
Coordenador-Geral

Coordenação Acadêmica do CEAD
Débora Furtado Barrera
Coordenadora

Equipe Multidisciplinar UAB/CEAD
Danielle Xabregas Pamplona Nogueira
Débora Furtado Barrera
Deise Mazzarella Goulart Ferreira
Fabrícia Faleiros Pimenta
Helena Célia de Souza Sacerdote
Helena Cristina Ribeiro Silva
Janaína Angelina Teixeira
Jean Vieira de Brito
Lívia Veleda de Sousa e Melo
Marcos Rogério Martins Costa
Matheus Felipe da Costa
Moisés Silva de Sousa
Patrícia Teixeira Batista
Sanny Caroline Saraiva de Sousa
Sílvia Urmila Almeida Santos
Thiago dos Santos Brandão

Autores
Olavo Leopoldino da Silva Filho
Marcello Ferreira

Revisão
Helena Célia de Souza Sacerdote
Fabrícia Faleiros Pimenta

Diagramação
Matheus Felipe da Costa
Sanny Caroline Saraiva de Sousa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(BENITEZ Catalogação Ass. Editorial, MS, Brasil)

S58L Silva Filho, Olavo Leopoldino da
1.ed. Matemática básica / Olavo Leopoldino da Silva Filho, Marcello Ferreira. – 1.ed. –
Brasília, DF : Universidade de Brasília, 2021.
39 p.; il.; 21 x 29 cm.

Bibliografia.
ISBN : 978-65-86721-58-4

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Ferreira,
Marcello. II. Título.
01-2021/43 CDD 510.7

Boas-vindas

Seja bem-vindo(a) ao curso de matemática básica!

Aqui, você terá a oportunidade de relembrar conceitos matemáticos do ensino fundamental e do ensino médio.
Isso poderá ajudar você a ampliar os conhecimentos gerais, que é um dos objetos da formação superior.

Desejamos bons estudos!

Sumário

Apresentação

Neste livro, trataremos sobre os principais temas de matemática do ensino fundamental e do ensino médio que serão necessários para que você possa apresentar um ótimo desempenho nas disciplinas que requerem conhecimentos matemáticos prévios.

No âmbito do ensino médio, por sua vez, um livro assim pode servir imensamente como um meio de rever os principais tópicos de matemática que o estudante precisa saber para, ao ingressar na universidade, poder encarar os cursos iniciais de matemática de uma maneira sólida e produtiva. Um curso dessa natureza, normalmente, é chamado de pré-cálculo, pelas razões já apontadas.

Como livro digital interativo, a ideia é fazer com que o aprendizado matemático se torne mais dinâmico, com simulações, videoaulas explicativas de temas particularmente complexos, quizzes em pontos importantes do material etc.

Assim, apresentamos a seguir uma legenda dos ícones que indicarão que tipo de atividade está disponível, sempre com as informações necessárias para que você possa utilizar o elemento interativo com a maior qualidade possível.

Representa uma **aula completa** em vídeo sobre o tema da seção. No vídeo, são explicados os temas apresentados na seção, e são também, eventualmente, apresentados temas correlatos

Representa uma **simulação** que se relaciona ao material sendo estudado naquele ponto. É um chamado a você, para que faça uma pausa na leitura um momento e reforce a apreensão do conteúdo a partir do simulador.

Representa um **desafio** para você. Uma tarefa de maior grau de dificuldade, mas cujo processo de resolução poderá contribuir muito com a sua compreensão da disciplina e o desenvolvimento de sua maturidade formal.

Agora, mãos à obra e vamos ao curso! Você pode começar agora, assistindo a este vídeo que inaugura o curso:

Assista **A matemática como linguagem.**

01 Conjuntos

O estudo dos conjuntos é de suma importância para a compreensão de inúmeros tópicos em matemática (assim como em outras áreas, a exemplo da estatística). Em particular, a compreensão do que são os conjuntos, isto é, como você pode operar com eles, dentre outros aspectos, é fundamental para o estudo das funções, que você verá mais adiante. Uma parte importante da lógica formal, chamada de lógica de predicados de primeira ordem, também é totalmente fundamentada a partir de conjuntos.

Assim, nesta unidade, esperamos que você, ao final, seja capaz de:

- caracterizar conjuntos;
- operar com conjuntos; e
- pensar logicamente a partir de conjuntos.

Assista **1ª aula de conjuntos.**

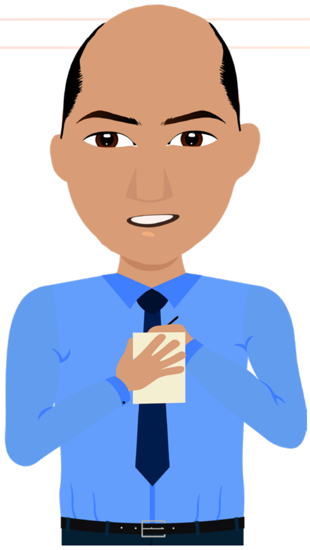
Em matemática, **conjunto** é, intuitivamente, uma coleção ou um agrupamento de objetos, chamados **elementos**. Os elementos podem representar qualquer coisa – números, pessoas, letras etc. –, até mesmo outros conjuntos. Se x é um elemento do conjunto B, então representamos matematicamente isso por $x \in B$. Da mesma maneira, representamos que um elemento x não pertence ao conjunto B por $x \notin B$. Essas relações entre elementos e conjuntos são chamadas de **relações de pertinência**.

Um conjunto é **representado** por uma letra do alfabeto latino, maiúscula (A,B,C,...), enquanto que seus elementos são representados por letras latinas minúsculas, interpostos entre chaves. Assim, por exemplo, $A=\{v,x,y,z\}$ representa um conjunto A dos quatro elementos v, x, y e z.

A maneira mais simples de representar um conjunto é por meio de uma **lista** de seus elementos entre chaves ({ }):

$$P=\{\text{casa, mansão, barraco}\}.$$

> Informalmente, utiliza-se o sinal "..." quando a **regra de formação** do conjunto é óbvia a partir da enumeração de alguns elementos.



Assim, os conjuntos a seguir têm, respectivamente, um número finito e um número infinito de elementos:

A={1,2,3,...,100}e N={0,1,2,3,4,...}

O número de elementos de um conjunto define sua **cardinalidade**. Conjuntos que são elementos de outros conjuntos são representados com chaves dentro de chaves:

C={{a,b,c},{1,2,3,...,89}}.

Também é possível representar os conjuntos com a chamada **notação de composição** do conjunto, que utiliza uma propriedade P, comum a todos os elementos, para definir os elementos do conjunto:

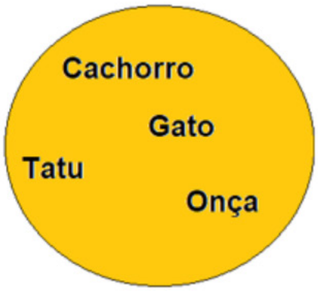
R={x|x é um país do planeta Terra}.

O conjunto A será formado por todos os países do planeta Terra, ou seja, R={Alemanha, Austrália, Brasil,...}.

Neste outro exemplo,

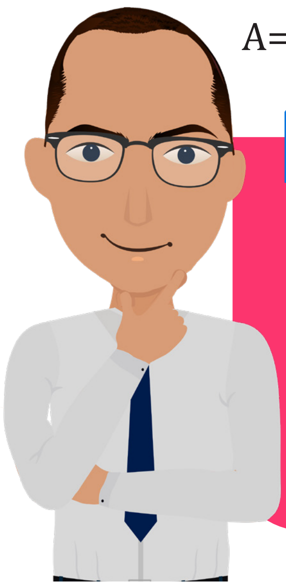
F={x|x é divisível por 2},

temos que F é o conjunto de todos os elementos pares.



Finalmente, do ponto de vista gráfico, é possível representar um conjunto por meio do **diagrama de Venn**, uma linha fechada com todos os elementos escritos em seu interior. Assim, por exemplo, os elementos do conjunto F, anteriormente definido, podem ser graficamente representados pelo diagrama de Venn apresentado à esquerda, enquanto o conjunto dos animais poderia ser representado pelo diagrama de Venn apresentado à direita.

Dizemos que um conjunto A é **subconjunto** de outro conjunto B quando todos os elementos de A também pertencem a B. Por exemplo:



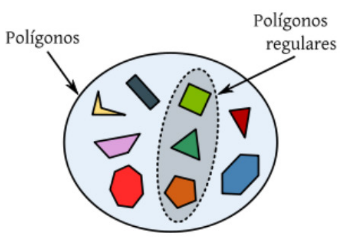
A={1,2,3} é subconjunto de B={1,2,3,4,5,6};

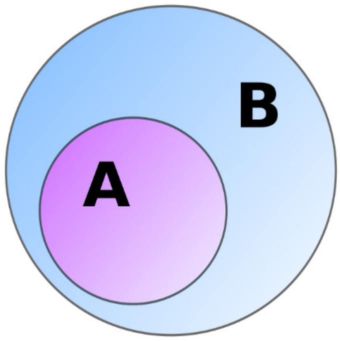
Nesse caso, A é subconjunto de B, e indica-se simbolicamente por A⊂B, e dizemos haver entre A e B uma **relação de inclusão**. Do ponto de vista **lógico**, pode-se definir um subconjunto da seguinte maneira:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B],$$

Que se lê: A está contido em B se, e somente se (⇔), para todo x (∀x), se x pertence ao conjunto A, então x pertence ao conjunto B (→ representa o **conectivo lógico** se..., então).

Do ponto de vista da representação pelo diagrama de Venn, $A \subset B$ pode ser graficamente representado como nas imagens a seguir:





Na primeira imagem, de todos os polígonos, destaca-se, como subconjunto, o conjunto dos polígonos regulares. Na segunda imagem, você encontra uma representação abstrata do conjunto A como subconjunto do conjunto B.

A expressão anterior **define** uma propriedade de conjuntos (a de ser subconjunto) a partir de uma **proposição lógica**. Ela nos permite **demonstrar** algumas propriedades da relação de inclusão.

Assim, é imediato que todo conjunto é subconjunto de si mesmo, pois é uma verdade lógica imediata que: se x pertence a B, então x pertence a B, ou seja,

$$B \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in B \rightarrow x \in B].$$

Os subconjuntos de B que não são iguais a B são chamados de **subconjuntos próprios**. Note que dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos, ou seja,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B],$$

que é o mesmo que dizer $A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$.

1.1 Alguns conjuntos importantes

Assista **2ª aula de conjuntos.**

Conjunto unitário: conjunto com apenas um elemento. Por exemplo: P={a}, ou P={x|x é país sul americano cuja capital é Brasília}.

Conjunto vazio: conjunto sem qualquer elemento. Por exemplo: P={x|x é um número primo e par maior que 2}. O conjunto vazio é geralmente representado pela letra grega ϕ ou, simplesmente, por { }. O conjunto vazio é sempre subconjunto de qualquer outro conjunto.

Conjunto das partes de um conjunto dado: dado um conjunto, é construído com todos os subconjuntos que podem ser construídos a partir de seus elementos. Por exemplo: se C={1,2,3}, então o conjunto das partes de C, simbolizado por P(C), é dado por

$$P(C)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},C\}.$$

Conjunto universo: é o conjunto que contém como subconjuntos todos os conjuntos possíveis. Se temos um problema específico, em que os elementos têm uma característica particular, então podemos restringir o conjunto universo a apenas elementos do tipo particular dado. Assim, em um problema sobre números naturais, o conjunto de todos os números naturais é o conjunto universo. Geralmente, o conjunto universo é denotado por U.

1.2 Conjuntos numéricos

Assista **3ª aula de conjuntos.**

Há um tipo particular de conjuntos que são muito importantes na matemática: são os chamados conjuntos numéricos. Assim, temos:

Conjunto dos números naturais: é o conjunto $N=\{0,1,2,...\}$;

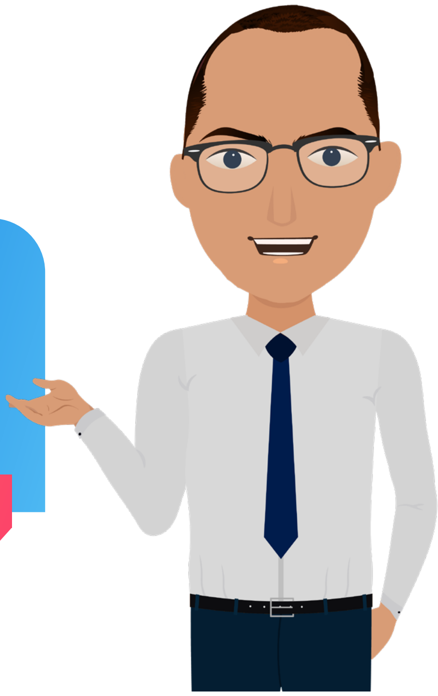
Conjunto dos números inteiros: dado por $Z=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$;

Conjunto dos números racionais: representado por $Q=\{x/y|x\in Z$ e $y\in Z*\}$, em que $Z*$ representa o conjunto dos números inteiros sem incluir o número zero;

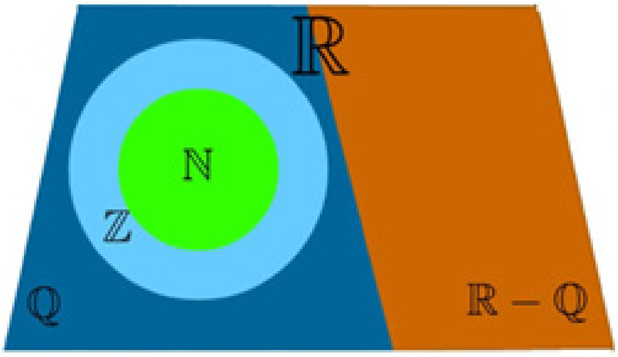
Conjunto dos números irracionais: representado por I, são todos os números que não podem ser representados como números racionais. Por exemplo, $2-\sqrt{2}$ é um número irracional, como se pode provar;

Conjunto dos números reais: representado por R, é o conjunto formado por todos os números racionais e todos os números irracionais.

A seguir vamos conhecer uma representação visual da relação entres os conjuntos.



Em termos de diagramas de Venn, podemos representar a relação entre os conjuntos na forma:



Note que um número real ou é racional, ou é irracional, não podendo ser ambas as coisas, nem uma terceira opção.

Um tipo importante de subconjunto do conjunto dos números reais R é o que chamamos de **intervalo**. Um intervalo pode ser construído a partir de símbolos de desigualdade, como <, >, ≤ ou ≥. Assim, por exemplo, uma desigualdade dada por $0 \leq x \leq 1$representa um intervalo de comprimento 1, subconjunto dos números reais. Note que tal intervalo inclui os pontos extremos (0 e 1). Um intervalo assim é apresentado como [0,1], em que usamos colchetes justamente para indicar que os pontos extremos fazem parte do intervalo. Dizemos que o **intervalo é fechado em seus extremos** (ou fechado à direita e à esquerda).

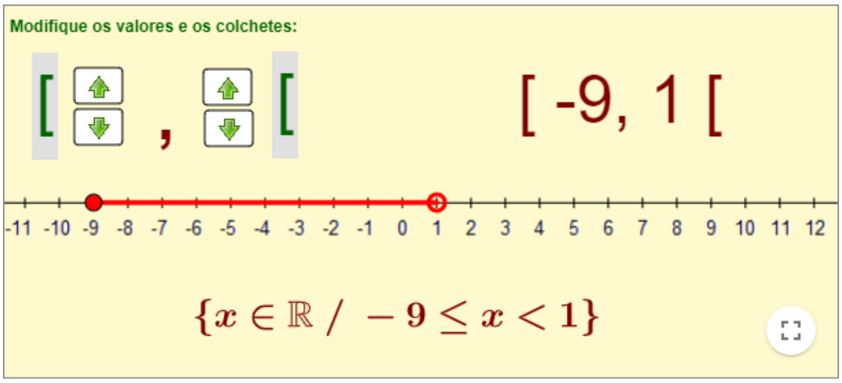
Por outro lado, em um intervalo dado por $0<x<1$, os pontos extremos não fazem parte do conjunto. Indicamos isso com o uso de parênteses, representamos o intervalo como (0,1) e dizemos que o **intervalo é aberto em seus extremos** (ou aberto à direita e à esquerda).

Finalmente, podemos ter intervalos mistos, ou seja, um dos extremos pertence ao intervalo, enquanto o outro, não. Por exemplo: $0 \leq x<1$ é um intervalo em que o número 0 pertence ao conjunto, enquanto que o número 1 não pertence. Indicamos isso escrevendo [0,1). Neste exemplo específico, dizemos que o **intervalo é fechado à esquerda e aberto à direita.**

Na figura a seguir, apresentamos os tipos de intervalos da reta real.

Representação na reta real	Sentença matemática	Notações simbólicas	
Intervalo aberto: a b	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	]a,b[	(a,b)
Intervalo fechado: a b	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	[a,b]	[a,b]
Intervalo semi-aberto à direita: a b	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	[a,b[	[a,b)
Intervalo semi-aberto à esquerda: a b	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	]a,b]	(a,b]

No aplicativo a seguir, você poderá criar vários tipos de intervalos na reta real para desenvolver sua compreensão do tema.



Descrição:	Esta atividade permite que você trabalhe com intervalos, identificando quando são intervalos abertos, fechados, aumentando e diminuindo os valores dos limites dos intervalos. Serve, portanto, para que você ganhe proficiência na escrita de intervalos.
Ação:	Teste todas as possibilidades, seja do tipo de intervalo (aberto ou fechado; para tanto, basta clicar nos colchetes) e nos seus limites numéricos (bastando, para isso, arrastar os pontos vermelhos). Neste processo, fique bastante atento à mudança dos sinais de desigualdade apresentados na parte inferior.

1.3 Operações entre conjuntos

Assista **4ª aula de conjuntos.**

De posse das ideias mais fundamentais sobre conjuntos, podemos passar a investigar algumas operações que você pode realizar com eles. Vejamos algumas:

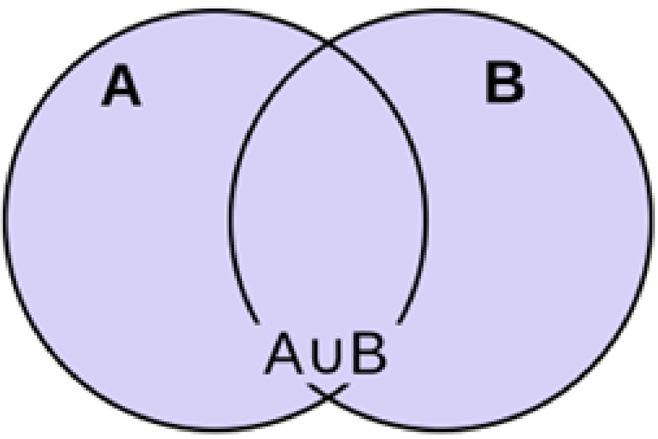
Operação de união

Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto C como o **conjunto união** de A e B (e representamos por $C = A \cup B$) da seguinte maneira:

$$C = A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

Ou seja, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou que pertencem a B.

Em termos de diagramas de Venn, expressamos a união de dois conjuntos A e B como na figura a seguir:



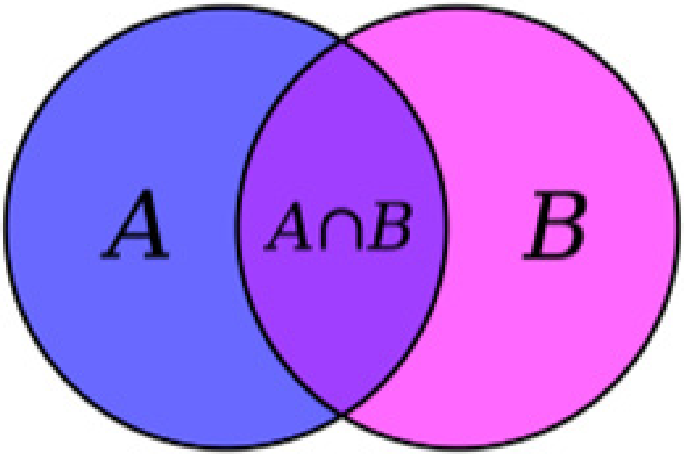
Pintamos da mesma cor os dois conjuntos para mostrar que todos os elementos pertencem à união deles.

Operação de interseção

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que o conjunto interseção de A e B é aquele que possui apenas elementos que estão em A e em B. Simbolicamente, temos:

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

Representamos graficamente essa operação como na figura a seguir:

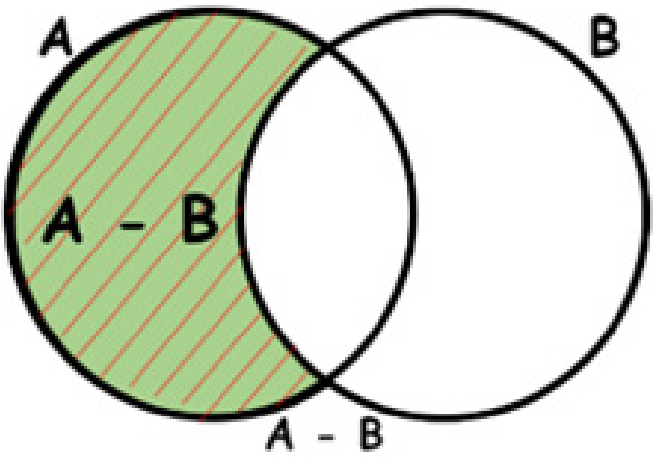


Representamos explicitamente a parte que define apenas a interseção.

Operação de diferença

Se você quiser tomar, de dois conjuntos A e B, apenas os elementos que estão em A, mas não estão em B, então utilizamos a operação de diferença. Assim, definimos o **conjunto diferença** entre A e B, escrito como A–B, da seguinte maneira:

$$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$



O conjunto complementar

Dado um conjunto A qualquer, dizemos que o **conjunto complementar** de A, com relação ao conjunto universo U é o conjunto de todos os elementos de U que não pertencem a A. Se desejamos representar a complementaridade relativa de um conjunto A respectivamente a um conjunto B, então dizemos que é o conjunto de todos os elementos de B que não pertencem a A. A complementaridade de A em B, simbolizada CBA, pode, portanto, ser expressa em termos da diferença.

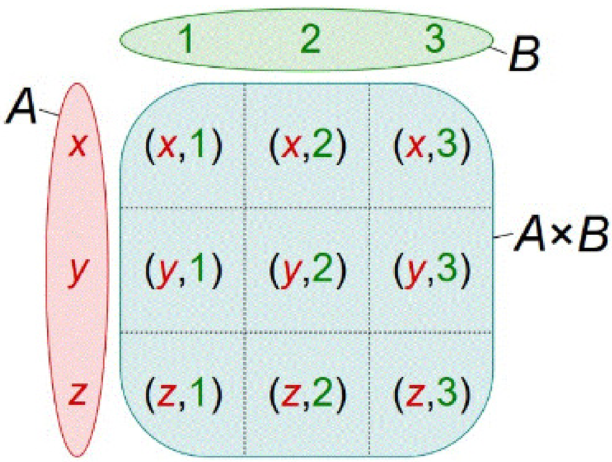
O produto cartesiano

Uma noção muito importante na teoria dos conjuntos é a de produto cartesiano. Assim, considere que temos um conjunto A e um conjunto B. O **produto cartesiano** entre A e B, simbolizado por A×B, é o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) tais que x∈A e y∈B. Assim,

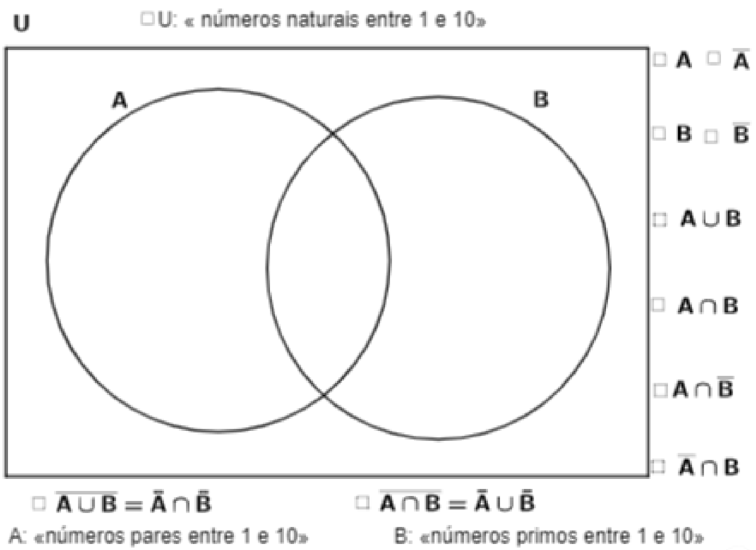
$$A\times B=\{(x,y)|(x\in A)\wedge(y\in B)\}.$$

É importante não confundir o produto cartesiano com a interseção. Os elementos do produto cartesiano são pares ordenados.

Em termos de diagramas de Venn, representamos graficamente o produto cartesiano como uma tabela ou como setas que vão de um conjunto ao outro formando os pares ordenados.



O produto cartesiano é muito importante para definir o chamado plano cartesiano, que será o plano em que iremos definir nossas funções. O plano cartesiano nada mais é que R×R, em que R é o conjunto dos números reais.

	
Descrição:	Na atividade, você encontrará os conjuntos A e B (contendo números naturais, se quiser expô-los). Ali há inúmeras opções que combinam operações com os conjuntos A e B. Nem todas são possíveis, entretanto. Em função da sua escolha, o simulador seleciona regiões dos conjuntos.
Ação:	Teste todas as possibilidades, sempre refletindo sobre o resultado. Isso lhe dará uma excelente ideia sobre o efeito de cada uma das operações sobre os conjuntos em geral (outro excelente simulador geogebra pode ser encontrado aqui). Note que não faz sentido marcar um conjunto e seu complementar ao mesmo tempo.

02 Matemática Elementar

Continuando nossa intenção de relembrar conceitos matemáticos do ensino fundamental e do ensino médio, esperamos que você, ao final desse estudo, seja capaz de:

- operar com frações as mais variadas;
- calcular com a potenciação;
- trabalhar com a radiciação;
- manipular expressões polinomiais; e
- reconhecer alguns produtos notáveis e seu significado.

Uma vez que estudamos os conjuntos numéricos a partir da perspectiva de conjuntos, é importante recapitular certos conhecimentos que aparecem a todo momento quando desenvolvemos expressões matemáticas.

Aqui estudaremos as **frações**. Depois, estudaremos a **potenciação** e a **radiciação**. Abordaremos, então, a manipulação de **expressões polinomiais**, em particular voltados para as suas simplificações. Dentre tais expressões, estudaremos os **produtos notáveis.**

2.1 Frações

Frações são números que expressamos pela razão de dois números inteiros, ou seja, podemos dizer que a fração de um número é representada de uma forma genérica como a razão a/b, onde a é o numerador e b o denominador e, por definição, $b \neq 0$.

Um pouco de nomenclatura:

Fração própria: toda aquela em que o numerador é menor que denominador. Uma fração própria representa um valor maior do que zero e menor do que um (assumindo-se numerador e denominador positivos).

Ou seja: $b>a \rightarrow 0<a/b<1$.

Assim, por exemplo, 1/3, 4/14 são frações próprias;

Fração imprópria: são aquelas em que o denominador é menor que o numerador. Representam valores maiores do que um, assumindo-se numerador e denominador positivos.

Ou seja: $a>b \rightarrow a/b>1$;

Fração aparente: são aquelas em que o numerador é um múltiplo do denominador. São ditas aparentes porque, de fato, após simplificação, não representam mais um número racional, mas, sim, um número inteiro. Ou seja, na fração aparente $a/b \rightarrow a=m \cdot b$, em que m é um número inteiro; neste caso $a=m$ de fato.

Agora que sabemos caracterizar as frações, precisamos saber como operar com elas, ou seja, como combinar frações segundo as operações aritméticas fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão.

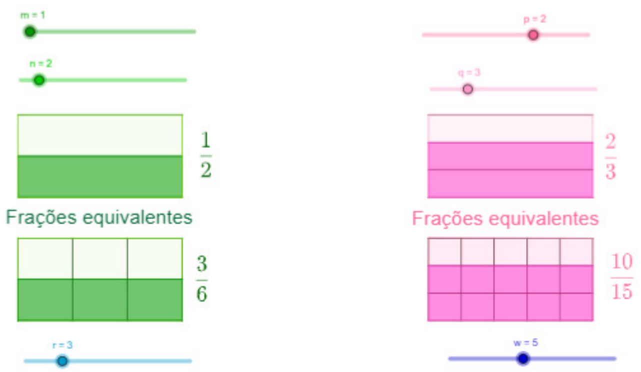
2.1.1 Simplificação de frações

Assista **Tipos de frações, frações equivalentes e simplificação de frações.**

Em primeiro lugar, devemos lembrar que uma fração nada mais é do que a representação de uma divisão. Assim, de forma geral, uma fração qualquer, do tipo a/b significará que $a=b/q$, onde q, o resultado da divisão, não é um número inteiro (estamos assumindo frações próprias e impróprias, apenas). Assim, por exemplo, $18/7 \rightarrow 18=7\cdot 2{,}5714$.

Podemos multiplicar ambos os lados desta igualdade pelo mesmo número, digamos k, para ficar com $(18\cdot k)=(7\cdot k)\cdot 2{,}5714$. Dessa maneira, fica óbvio que se multiplicarmos o numerador e o denominador pelo mesmo número, não alteraremos o resultado.

Raciocinando inversamente, se temos uma fração a/b dando um valor q, de tal maneira que a e b têm um fator comum, digamos $m \in Z$, ou seja, $a=a'\cdot m$ e $b=b'\cdot m$, então $a'\cdot m=(b'\cdot m)\cdot q$ e podemos, simplesmente, desconsiderar o valor de m, escrevendo a fração na forma simplificada a'/b'. Esse processo de eliminar fatores comuns no numerador e denominador chama-se **simplificação de fração**.

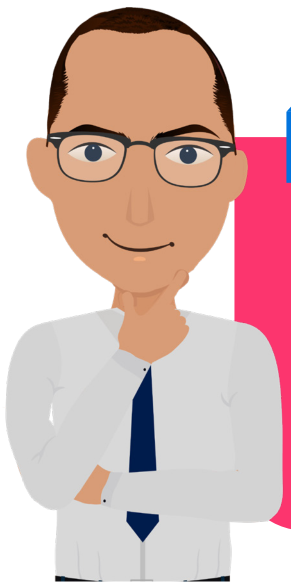
<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Descrição:</td><td>No aplicativo, há duas telas: uma para frações do tipo 1/d e outra para frações p/q. Na parte superior, você ajusta a fração que quer analisar. Na parte inferior, você diz qual o número de colunas em que quer subdividir o retângulo maior (representando o numerador). O simulador Geogebra automaticamente ajusta o número de linhas (de modo que o retângulo fique subdividido no número de quadrados pintados que gerem uma fração equivalente à escolhida mais acima).</td></tr>
<tr><td>Ação:</td><td>Rode o aplicativo várias vezes, modificando as frações superiores, ajustando o número de linhas do retângulo inferior, tentando encontrar qual será o resultado apresentado.</td></tr>
</table>

2.1.2 Operações com frações 1: adição e subtração de frações

Assista **Adição e subtração de frações: mesmo denominador.**

Há duas situações características na adição e subtração de frações que devem ser tratadas de modo independente. A primeira é quando as frações sendo adicionadas ou subtraídas têm o mesmo denominador. A segunda é quando essas frações têm denominadores diferentes.

Suponha que temos uma pizza e a dividimos em três partes iguais. Assim, cada parte vale 1/3 do total. Se somarmos duas partes, teremos simplesmente 1/3+1/3=2/3; somando mais 1/3 chegamos à pizza inteira, ou seja, 1. Essa operação, concretamente exemplificada, é evidentemente geral e pode ser colocada em uma regra simples:



Dadas duas frações, se elas possuem denominadores iguais, então, para somá-las (subtraí-las), devemos simplesmente manter o denominador e somar (subtrair) os numeradores.

Assim, por exemplo, temos:

$$\frac{1}{21}+\frac{3}{21}=\frac{3+1}{21}=\frac{4}{21}.$$

Entretanto, *não sabemos como somar ou subtrair, diretamente, frações de denominadores diferentes*. Em casos assim, devemos, primeiramente, trabalhar com as frações envolvidas, de modo a que passem a ter o mesmo denominador, para então aplicar a regra apresentada anteriormente.

Vejamos uma situação, para ver se, dela, conseguimos chegar a uma regra geral: vamos adicionar 3/5 + 1/9. Nesse caso, para chegar a um mesmo denominador, multiplicamos o termo à esquerda por 9 no numerador e no denominador (já vimos que isso não altera o valor da fração) e multiplicamos o termo à direita no numerador e no denominador por 5. Ficamos, assim, com

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{9}=\frac{3\cdot 9}{5\cdot 9}+\frac{1\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{27}{45}+\frac{5}{45},$$

que agora possuem denominadores iguais. Assim, aplicamos a regra anterior para ficar com

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{9}=\frac{27}{45}+\frac{5}{45}=\frac{32}{45}.$$

Os passos anteriores aparentemente resolvem nosso problema de adicionar ou subtrair frações de denominadores diferentes. Mas veja o seguinte exemplo: vamos adicionar agora as frações 3/12+7/15, aplicando o método anterior, ficamos com

$$\frac{3}{12}+\frac{7}{15}=\frac{45}{180}+\frac{84}{180}=\frac{129}{180}.$$

Esse resultado, a despeito de estar correto, fornece uma fração que pode ser simplificada. De fato, há um fator comum igual a 3 no denominador e no numerador, pois 129=3·43 e 180=3·60, de modo que poderíamos escrever o resultado como 43/60 (e não seria possível simplificar ainda mais).

Curiosamente, 3 é justamente o fator comum que existe entre 12 e 15. Mais ainda, se, em vez de multiplicarmos $12\cdot 15=180$, multiplicarmos $(4\cdot 5)\cdot 3=60$, obteremos o resultado no denominador já simplificado.

O que esse argumento mostra é que, quando os denominadores das frações envolvidas na adição ou na subtração possuem fatores comuns, podemos usar esses fatores uma única vez, em vez de simplesmente multiplicarmos esses denominadores sem mais. Finalmente, note que 60 é o menor número que é múltiplo, ao mesmo tempo, de 12 e 15, pois $12\cdot 5=60$, enquanto $15\cdot 4=60$, e nenhum número menor que 60 possui essa propriedade. Chamamos a este número 60 de **mínimo múltiplo comum** (mais brevemente m.m.c.).

Fica claro, da discussão anterior, que é interessante você ser capaz de calcular o mínimo múltiplo comum de um conjunto de números (não necessariamente de apenas dois números).

2.1.3 Obtenção do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e do máximo divisor comum (m.d.c.)

Assista **Frações com denominadores diferentes – o mínimo múltiplo comum.**

Para se obter facilmente o mínimo múltiplo comum de n números, uma boa estratégia é fazer a decomposição destes em fatores primos. Vejamos um exemplo: se temos 3 números, 28, 12 e 16, então podemos decompô-los em primos da seguinte maneira $28=2\cdot 2\cdot 7$; $12=2\cdot 2\cdot 3$; $16=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$. Se tomarmos cada um dos números primos que aparecem nas decomposições, no maior número de vezes em que aparecem, teremos $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7=336$, e 336 é o menor número que é múltiplo de 28, 12 e 16, ao mesmo tempo.

Assim, temos uma regra para a obtenção do m.m.c. entre n números naturais.

Dados n números naturais, decomponha-os em seus fatores primos. Para cada fator primo, tome o caso em que ocorra a multiplicação com maior número de fatores. A multiplicação de todos estes termos será o m.m.c. dos n números naturais.

Podemos aproveitar a discussão para definir um outro indicador importante, chamado máximo divisor comum (m.d.c.) entre n números. Como o nome diz, é o maior número que ainda divide os n números dados. Temos então a regra:

Dados n números naturais, decomponha-os em seus fatores primos. Para cada fator primo, tome o caso em que ocorra a multiplicação com menor número de fatores. A multiplicação de todos estes termos serão o m.d.c. dos n números naturais.

Voltando agora às frações, podemos aplicar a seguinte regra para encontrar a adição ou subtração de n frações com denominadores diferentes:

Dadas n frações com denominadores diferentes, encontre o mínimo múltiplo comum desses denominadores. Agora, para cada fração, divida o m.m.c. encontrado pelo denominador e multiplique este resultado pelo numerador. Todas as frações ficarão com o mesmo denominador (o m.m.c.) e poderão ser somadas ou subtraídas usando-se a regra de soma ou subtração de frações com o mesmo denominador.

Vejamos um exemplo: queremos somar as frações 5/18, 6/24, 3/14. Neste caso, aplicando a decomposição, encontramos que 18=2·3·3; 24=2·2·2·3; 14=2·7. Assim, o fator primo 2 aparece com maior número de fatores como 2·2·2=8, o fator primo 3 aparece com o maior número de fatores 3·3=9 e o fator primo 7 aparece apenas uma vez, na decomposição do 14. O m.m.c. entre esses números, simbolizado por m.m.c.{18,24,14}, fica igual a m.m.c.{18,24,14}=8·9·7=504. A soma das frações então fica:

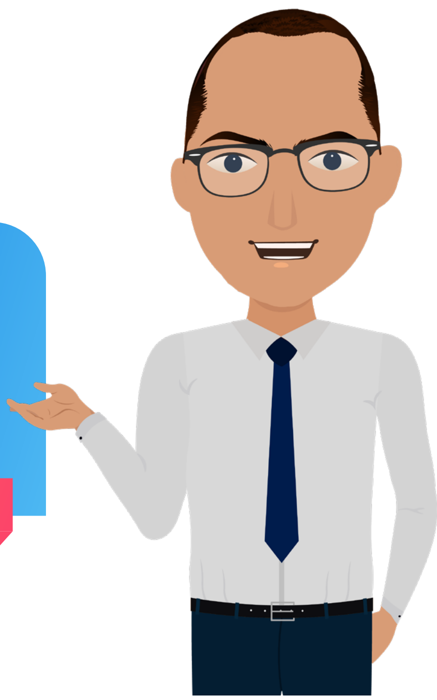
$$\frac{5}{18}+\frac{6}{24}+\frac{3}{14}=\frac{140}{504}+\frac{126}{504}+\frac{108}{504}=\frac{374}{504}.$$

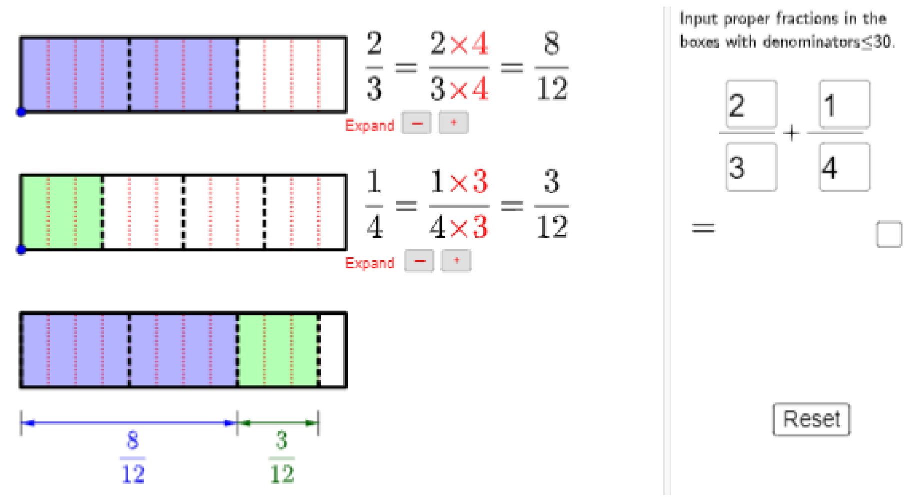
Note, entretanto, que esse resultado ainda pode ser simplificado (dividindo-se o numerador e o denominador por 2). Isso ocorreu porque utilizamos uma fração não simplificada (6/24=1/4) nos cálculos. Se tivéssemos simplificado e, depois, feito a adição, teríamos um m.m.c.{18,4,14}=4·9·7=252. Nossa adição ficaria

$$\frac{5}{18}+\frac{1}{4}+\frac{3}{14}=\frac{70}{252}+\frac{63}{252}+\frac{54}{252}=\frac{187}{504},$$

que não possuem fatores comuns, não podendo mais serem simplificados.

A seguir vamos conhecer mais um artifício interativo, clique no ícone para poder acessar.





Descrição:	Na região à direita, devem ser inseridas duas *frações próprias*. O simulador geogebra irá, então, apresentar à esquerda as frações como dois retângulos, com o número de subdivisões iguais aos denominadores das duas frações, e com subdivisões pintadas (hachuradas) iguais em número ao numerador das frações. Ao solicitar a adição (clicando em “Add”), o simulador irá apresentá-la graficamente. Você deve, então, buscar reduzir as frações a frações com mesmo denominador, clicando em “expand”. Quando as frações tiverem o mesmo denominador, aparecerá à direita uma *checkbox* para se efetuar a soma.
Ação:	Você deve inserir duas frações (por exemplo 1/8 e 3/6). Solicite, então, que a soma seja feita. Em seguida, *antes de clicar em “expand”*, procure descobrir que números deverão ser buscados com o botão “expand” para se chegar a um mesmo denominador e responda, então, qual o mínimo múltiplo comum associado à fração. Teste sua resposta clicando em “expand”. Verifique se alguma das frações escolhidas era ou não redutível (própria) e reflita sobre o resultado.

2.1.4 Operações com frações 2: multiplicação e divisão

Assista **Produto e divisão de frações .**

Como a fração é uma forma de representar uma divisão, as operações de multiplicação e divisão de frações são muito mais simples do que a adição e a subtração. As principais propriedades das operações de multiplicação e divisão de frações decorrem do fato de que, se

a/b=c→a=c·b.   (Regra de representação)

Assim, suponhamos que queremos saber o resultado de se escrever:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}.$$

Assim, se a/b÷c/d=R, então a/b=Rc/d. Usando regra de representação, isso implica que a=R·b·c/d que, por sua vez, implica, usando novamente a regra, a·d=R·b·c. Mas, usando novamente a regra (no sentido inverso), podemos escrever então

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot c} = R;$$

Mas já sabemos que a/b÷c/d=R. Então, chegamos à propriedade

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Deste resultado, obtemos que

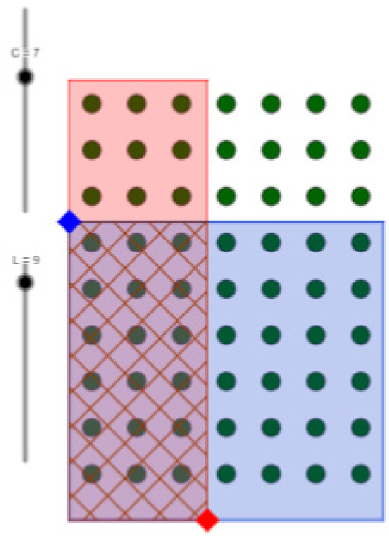
$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{1} \div \frac{a}{b} = \frac{b}{a};$$

e, também

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{d}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Agrupando essas propriedades, e as relativas à soma e subtração, temos

- $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$;
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$;
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

	
Descrição:	Os controles deslizantes à esquerda (C e L) determinam o número de pontos verdes nas colunas e o número de pontos verdes na linha. Assim, haverá CxL pontos verdes. Com o controle deslizante vermelho, você ajusta o número que vai aparecer no numerador da fração vermelha (contado como o número de colunas na primeira linha atrás da linha vermelha). Com o controle azul, você ajusta o número que vai aparecer no numerador da fração azul (contado como o número de linhas na primeira coluna abaixo da linha azul). O resultado da operação é imediatamente apresentado.
Ação:	Você deverá fazer ajustes nos controles C e L, bem como nos controles azul e vermelho. Após algumas tentativas, você deve apresentar o modelo matemático que justifica o funcionamento do simulador geogebra.

2.2 Divisibilidade

Assista **Estudo da divisibilidade por diversos números naturais .**

Existem algumas regras interessantes para se garantir a divisibilidade de números grandes por certos fatores mais usuais. Lembramos que um número natural a é divisível por outro número natural b quando a/b dão um número inteiro c; ou seja, a divisão não deixa resto. As regras são as seguintes:

- **Divisibilidade por 2**: um número só é divisível por 2 quando ele termina (algarismo da unidade) em um número par ou no zero;

- **Divisibilidade por 3**: um número só é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3. Assim, é possível aplicar essa regra reiteradamente sobre um número até que sobre apenas um número de um dígito, ou até que o número restante seja facilmente verificável como divisível ou não por 3. Exemplo: 354791→29→11. Como 11 não é divisível por 3, o número original, 354791, também não é;

- **Divisibilidade por 4**: um número só é divisível por 4 quando os seus dois últimos algarismos (dezena e unidade) formam um número divisível por 4, ou são 00. Exemplo: 461098236→36; como 36 é divisível por quatro, o número original também é;

- **Divisibilidade por 5**: um número só é divisível por 5 se terminar no algarismo (unidade) 5 ou no algarismo 0;

- **Divisibilidade por 6**: um número é divisível por 6 se for simultaneamente divisível por 2 e por 3;

- **Divisibilidade por 8**: um número é divisível por 8 se os três últimos algarismos (centena, dezena e unidade) formarem um número divisível por 8. Assim, por exemplo, 321116784→784. Como 784 é divisível por 8, então o número original também será;

- **Divisibilidade por 9**: um número será divisível por 9 se a soma de seus algarismos gerar um número divisível por 9. Aqui, como no caso da divisibilidade por 3, é possível seguir o procedimento até que reste apenas um algarismo (que, neste caso, deverá ser obrigatoriamente o 9, para que haja divisibilidade). Exemplo: 2985712→34→7. Como não restou 9, 2985712 não é divisível por 9;
- **Divisibilidade por 10**: um número será divisível por 10 se ele terminar em 0.

Como já dissemos, em matemática não basta apenas saber que algo é verdadeiro... É importante saber provar que este algo é verdadeiro.

Assim, podemos nos perguntar: como provar o critério de divisibilidade por 3?

Considere o número de quatro algarismos (pode ser tantos quantos queiramos) abcd; podemos escrever este número como $a\times103+b\times102+c\times10+d=a(999+1)+b(99+1)+c(9+1)+d$. Por outro lado, podemos reescrever esta última passagem como $a(999+1)+b(99+1)+c(9+1)+d=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$. Ora, o primeiro número entre parênteses, $(999a+99b+9c)$, é claramente divisível por 3. Assim, para que o número todo seja divisível também, basta que $(a+b+c+d)$ também o seja. Mas esse número é a soma dos algarismos, de modo que demonstramos o que queríamos. Note que esta demonstração é claramente válida para o critério de divisibilidade por 9 também.

Demonstre a propriedade de divisibilidade por 55.
Depois, demonstre a propriedade de divisibilidade por 66.

2.3 Potenciação

Assista **Estudo e demonstrações acerca de potenciação.**

A potenciação nada mais é que uma notação simplificada para representar a multiplicação repetida de um número, que chamamos de base, uma certa quantidade n de vezes, que chamamos expoente. De forma prática, dado um número a, multiplicado n vezes, escrevemos: an. Assim, por exemplo, temos 33=3·3·3=27, ou (−1)4=(−1)·(−1)·(−1)·(−1)=1.

Se um número está elevado à potência 2, dizemos que ele está elevado ao quadrado. Quando a potência é 3, dizemos que está elevado ao cubo. É ainda importante observar o seguinte:

- Toda potência de 0 com expoentes positivos é igual a 0. Exemplo: 03=0·0·0=0;
- Os resultados de 0 e 0−n são valores indeterminados;
- Para qualquer valor do expoente n, 1n=1.

É muito importante que você se mostre capaz de manipular expressões envolvendo potências, elas aparecem na matemática e na física a todo momento! Para tanto, é necessário conhecer as regras envolvidas no uso de potências numéricas. A seguir apresentamos estas regras:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \Rightarrow b \neq 0$;
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{b^m}{a^m}$;
- $a^0 = 1$;
- $(-a)^0 = 1$;
- $-a^0 = -1$.

Note que algumas dessas regras são redundantes. Assim, se assumirmos que $a^{-m} = 1/a^m$ e que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, temos imediatamente que $a^m/a^n = a^{m-n}$.

De fato, a partir da notação fundamental que diz que o número a^n representa a multiplicação de a um número *n* de vezes, assim como a notação $a^{-m} = 1/a^m$, é possível provar todas as regras anteriormente apresentadas.

Como exemplo, vamos demonstrar a regra $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$. Note que a notação de $(a \cdot b)^m$ representa o produto $a \cdot b$ multiplicado por si mesmo m vezes, ou seja,

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots (a \cdot b)}_{m \text{ vezes}},$$

que podemos reorganizar na forma

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{m \text{ vezes}}\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots \cdot b)}_{m \text{ vezes}}.$$

É importante que você consiga demonstrar todas as propriedades, assumindo apenas as duas notações já mencionadas, e seus significados.

Demonstre que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Demonstre também que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Usando essas duas propriedades, demonstre que $a^m/a^n = a^{m-n}$.

2.4 Radiciação

Assista **Estudo e demonstrações acerca de radiciação.**

Para iniciar os estudos sobre radiciação, vamos introduzir o conceito de radicais. Seja a igualdade $b^n=a$, dizemos que b é a raiz enésima de a, ou seja:

$$b^n = a \longrightarrow \sqrt[n]{a} = b,$$

indicando que a **radiciação** é a operação inversa da potenciação. Disso segue que podemos demonstrar imediatamente as propriedades da radiciação, usando, para tanto, apenas as propriedades da potenciação. Temos as seguintes propriedades:

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a;$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a};$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow (b \neq 0);$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n\cdot m]{a^m \cdot b^n};$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[n\cdot m]{a^m}}{\sqrt[n\cdot m]{b^n}} = \sqrt[n\cdot m]{\frac{a^m}{b^n}}.$

Não podemos esquecer que a radiciação possui **condições de existência**. Assim, se temos $\sqrt[n]{-a}$, a raiz de um número negativo, então: (a) esse número não pertence ao conjunto dos números reais, se n for par; (b) esse número pertence ao conjunto dos números reais, se n for ímpar.

Note que, a partir da primeira identidade, que, na verdade, é uma definição para a raiz enésima de um número elevado a m, podemos demonstrar cada uma das propriedades acima apresentadas utilizando apenas as noções de potenciação e de cálculo com frações.

Assim, por exemplo, vamos provar que $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$; ora, usando a primeira identidade, temos que $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{1/n})^m$. Usando uma propriedade da exponenciação, sabemos que:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{1/n})^m = a^{m \cdot 1/n} = a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

As outras propriedades podem ser igualmente demonstradas. Você deve tentar fazer essas demonstrações.

Demonstre todas as propriedades de radiciação apresentadas anteriormente (sugestão: use sempre a definição da radiciação em termos da potenciação e as regras já conhecidas da potenciação).

2.5 Polinômios

Assista **Polinômios: definição e operações entre polinômios .**

Cada termo $ax^iy^j \cdots z^k$, isoladamente, para algum valor dos expoentes i,j,k e para um número a, é chamado **termo monomial**. Assim, por exemplo, $3x^2y^4z$, representa um termo monomial em que o **coeficiente** é 3, e no qual x^2y^4z é a **parte literal**. Dois termos monomiais são ditos semelhantes se eles possuem a mesma parte literal. Os termos não numéricos x, y, etc. são chamados de **variáveis**. O **grau** de um monômio é a soma das potências de suas variáveis. Assim, no exemplo anterior, grau=2+4+1=7.

Um **polinômio**, de modo geral, é qualquer uma soma **finita** de monômios. Assim, um polinômio pode estar definido em termos de várias variáveis. De modo geral, estamos interessados em polinômios que dependem apenas de uma única variável. Neste caso, os polinômios assumem assumem a expressão

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ ,}$$

em que os a_i, $i=1,2,...,n$ são chamados os **coeficientes** do polinômio, n é dito o **grau** do polinômio e x é a **variável** de definição do polinômio. Podemos escrever essa última expressão usando a notação de somatório na forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,.$$

Os polinômios podem ser operados segundo as quatro operações básicas.

- Na adição ou subtração de dois polinômios, devemos somar ou subtrair os coeficientes dos termos monomiais semelhantes, colocando em evidência a parte literal. Assim, por exemplo, a soma dos polinômios $p(x)=3-4x+21x^5$ e $q(x)=-1+2x-4x^3+8x^5$ fica $p(x)+q(x)=3-4x+21x^5+(-1+2x-4x^3+8x^5)=2-2x-4x^3+29x^5$;

- Na multiplicação de dois polinômios, devemos multiplicar cada termo monomial de um, por cada termo monomial do outro, realizando as operações de potenciação que se façam necessárias na parte literal de cada produto. Assim, por exemplo, o produto dos polinômios $p(x,y,z)=3x-4xy^2z-3yz^2$ pelo polinômio $q(x,y)=1-x+xy$ fornece o resultado

$$p(x,y,z)\cdot q(x,y)=3x-4xy^2z-3yz^2-3x^2-4x^2y^2z-3xyz^2+3x^2y-4x^2y^3z-3xy^2z^2;$$

- Na divisão de polinômios, devemos buscar termos no quociente que vão, após multiplicação pelo divisor, se ajustando aos termos de maior grau ainda existentes no dividendo, removendo-os sucessivamente, até que o grau do polinômio restante seja menor que o grau do polinômio divisor. Como exemplo, vamos dividir o polinômio $p(x)=x^3-6x^2-x+12$ pelo polinômio $q(x)=x-2$. Temos a seguinte sequência:

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3} - 6x^2 - x + 12 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3} + 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 4x - 9 \\ \cline{1-1}
-\cancel{4x^2} - x + 12 & \\
+\cancel{4x^2} - 8x \qquad & \\ \cline{1-1}
-\cancel{9x} + 12 & \\
+\cancel{9x} - 18 & \\ \cline{1-1}
-6 &
\end{array}$$

2.6 Fatoração

Assista **Fatoração de formas algébricas .**

Com a **fatoração**, transformamos uma soma ou uma subtração de expressões algébricas em um produto com fatores. Podemos fatorar uma expressão algébrica:

- colocando os fatores comuns em evidência. Assim, por exemplo:
$$x^2y^3z-xy^2z^3=xy^2z\cdot(xy-z^2);$$

- fazendo um agrupamento. Assim, por exemplo:
$$5z+2z+5x+2x=5z+5x+2z+2x=5\cdot(z+x)+2\cdot(z+x)=(5+2)\cdot(z+x);$$

- usando a diferença entre dois quadrados, dada por $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Assim, por exemplo:
$$36x^2-81y^2=(6x)^2-(9y)^2=(6x+9y)\cdot(6x-9y);$$

- usando as expressões dos trinômios perfeitos, dados por: $(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$ e $(x-a)^2=x^2-2xa-a^2$. Assim, por exemplo:
$$9y^2-12y+4=(3y-2)^2.$$

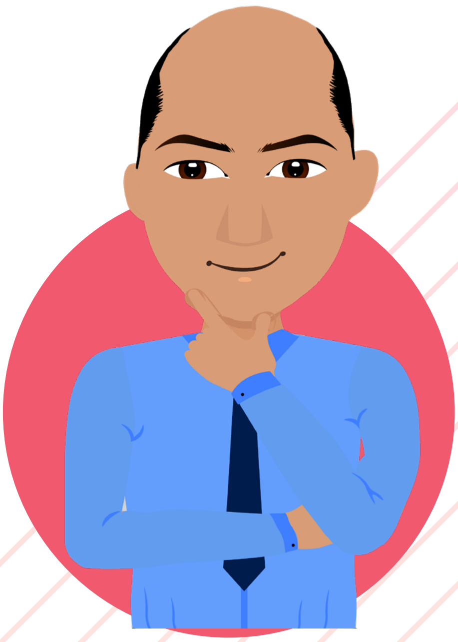
De fato, geralmente, em expressões mais complexas, o que se busca é simplificá-la usando de maneira combinada uma ou mais dessas formas de fatoração. No cálculo a seguir, apresentamos uma fatoração de expressão mais complexa:

$$x^2-2y^2+3xy+x+y=x^2+y^2+2xy+y^2+xy+x+y=(x+y)^2+y(y+x)+(y+x)=(y+x)\cdot(x+2y+1).$$

Encerramento

Vimos ao longo desse curso os elementos fundamentais da matemática básica para operar com frações as mais variadas; calcular com a potenciação; trabalhar com a radiciação; manipular expressões polinomiais; e reconhecer alguns produtos notáveis e seu significado.

Esperamos que você, após esse estudo, também consiga caracterizar, operar e pensar logicamente a partir de conjuntos.
Desejamos sucesso em sua jornada de estudos!



Referências

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2011. v. 3.

_______. **Matemática**: contextos e aplicações. São Paulo: Ática, 2011. v. 1.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**: volume 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

HEFEZ, A. **Elementos da aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, E. L. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números**: uma introdução à matemática. São Paulo: Edusp, 2013.

MIRAGLIA, F. **Teoria dos conjuntos**: um mínimo. São Paulo: Edusp, 1992.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática**: ideias e desafios. 14. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Álgebra I**. São Paulo: Livraria Francisco Alves Editora S. A., 1974.

Apoio:

Organização: